满足R—左模同态链归纳条件之环*

张　滨　龙

（长沙铁道学院科研所）

环的链条件已得到深入的研究，其成果相当丰富．许永华[1]曾提出过一种新的链条件，即R—左模同态链归纳条件．此条件完全脱离了以往的链条件的有限性，且是著名的Köthe猜测成立的充分必要条件．本文的目的是要指出：此条件不仅能使Köthe猜想成立，而且还可以得出另一些有意义的结果．我们引进了一个环的Levitzki子集的概念．从而证明了：环R的Levitzki根包含R的任何诣零单侧理想的充分必要条件是R满足每个Levitzki子集上R—左模同态链归纳条件．

本文同时还讨论了Kegel猜测：环R的两个局部幂零子环之和仍为局部幂零的．我们得到的结果是：如果环R = A + B，A为R的诣零左理想，B为R的诣零子环，则R是局部幂零的．当且仅当R满足R − L(R)的每一子集上R—左模同态链归纳条件。此处L(R)为R的Levitzki根．

本文所讨论的环都是结合环（不要求有单位元）．没有给出明确定义的术语其意义与〔1〕相同．

引理　设R是一个诣零环，N是R的一个真理想，如R满足R − N上R—左模同态链归纳的条件，则R/N必包含一个非零的幂零理想。

证　如果R − N中有一元素x，其左零化子$^{\perp}x = R$，则$Rx = 0$．记〔x〕为x所生成的理想，即〔x〕$= Rx + xR + RxR + Zx = xR + Zx$，则易知$[x]^2 = 0$．故$[\bar{x}]$即为$\bar{R} = R/N$中的非零的幂零理想．所以，我们可设对R − N中每一元素r，都有$^{\perp}r \neq R$．

记$M = \{ ^{\perp}x \mid x \in R - N \}$，由〔1〕．M中有极大元素．记为$^{\perp}x'$，我们要证$x'Rx' \subseteq N$．

如R − N中有一元素r，使$x'rx' \in N$，则由上述，$^{\perp}(x'rx') \neq R$，且$^{\perp}x' \subseteq {}^{\perp}(x'rx')$，由$^{\perp}x'$的极大性知$^{\perp}x' = {}^{\perp}(x'rx')$．又因为R为诣零环，故存在正整数$n$，使$(rx)^n = 0$，但$(rx')^{n-1} \neq 0$．又$r(x'r)^{n-2} \in {}^{\perp}(x'rx) = {}^{\perp}x'$，所以$r(x'r)^{n-2} = 0$，即$(rx')^{n-1} = 0$．此为矛盾，故对R − N中任一元素$r$，都必有$x'rx' \in N$．于是$x'(R - N)x' \subseteq N$．因此$x'Rx' \subset N$．

在$\bar{R} = R/N$中，如$\bar{x}\bar{R} = (0)$．则$\bar{R}$的左零化子就是$\bar{R}$的一个幂零理想．如$\bar{x}\bar{R} \neq$
$\neq (0)$．则它就可生成$\bar{R}$的一个幂零理想，至此引理证毕．

推论　设R是一个诣零环．L(R)为R的Levitzki根，那么，R满足R − L(R)上R—左模同态链归纳条件。当且仅当R是局部幂零的．

充分性是显然的，因为此时R − L(R)是空集，R当然满足空集上的R—左模同态链归纳条件．

必要性：只需证R = L(R)，如不然，则由引理，R/L(R)必含有一非零理想，此为不可能．因为R/L(R)为Levitzki半单的．

为了证明下面的定理1，我们引入Levitzki子集的概念．设I为环R的一个诣零左理想则称I + L(R) − L(I + L(R))为R的一个Levitzki子集．此处L(R)为环R的Levitzki根，

*1984年 2 月16日收到．

$L(I+L(R))$ 为环 $I+L(R)$ 的Levitzki 根，显然 $L(R)\subseteq L(I+L(R))$。

现在我们可以证明下面的

定理 1 设R是一个环，则R满足每个Levitzki 子集上R—左模同态链归纳条件，当且仅当 $L(R)$ 包含R的任何诣零单侧理想．

证 充分性 因为对R的任何诣零左理想 I，$I+L(R)$ 仍为R的诣零左理想，故 $I\subseteq L(R)\subseteq L(I+L(R))$．于是R的Levitzki子集都是空集．R当然满足空集上R—左模同态链归纳条件．

必要性 设 I 是R的一个诣零左理想，由引理的推论，R的诣零左理想 $I+L(R)$ 是局部幂零的．故 $I\subseteq L(R)$，所以我们只需证，对R的任一诣零右理想 J，必有 $J\subseteq L(R)$．对于 J 中任意一元素 x，令 $N=Rx+Zx$，则 $N^2=(Rx+Zx)(Rx+Zx)\subseteq Rx$，但 x 是幂零元，故 Rx 是诣零左理想．于是，对N中任一元素 ω，ω^2 是幂零元，所以 ω 是幂零元．因此N是诣零左理想，由上述 $N\subseteq L(R)$，所以，$x\in L(R)$，由此得到 $J\subseteq L(R)$．于是定理证毕．

Köthe 曾猜测：环R的任一诣零左理想必包含在一诣零双侧理想之中．许永华证明了：如R满足每个Köthe子集上R—左模同态链归纳条件，则R的每一诣零单侧理想都在R的诣零根中，我们在定理 1 中证明了：如R满足每个Levitzki 子集上R左模同态链归纳条件，则R的每一诣零单侧理想都在R的Levitzki 根中，所以也必在R的诣零根中．于是，此时R的Levitzki 根与诣零根重合．

现在我们讨论Kegel问题，Kegel〔2〕证明了如下结果：如果环R是两个幂零子环之和，则R是幂零的．进而又证明了：如环 $R=A+B$，此处A是R的幂零子环，则R是局部幂零的．于是猜测：如 $R=A+B$，此处A，B都是R的局部幂零子环，则R也是局部幂零的．Herstein[3]在R满足多项式恒等式这一条件下，证实了Kegel猜测，本文的结果是如下的：

定理 2 如果环 $R=A+B$，此处A为R的诣零左理想，B为R的诣零子环，则R是局部幂零的，当且仅当R满足 $R-L(R)$ 的每一子集上R—左模同态链归纳条件．

证 必要性 如R是局部幂零的，则 $R-L(R)$ 为空集，条件当然满足．

充分性 首先证R如有质理想，则R的质理想必不包含A．如 $A\subseteq P$，P为质理想，则 $B\not\subseteq P$．令 $P'=B\cap P$，则 P' 为B的理想．显然，$B-P'$ 为 $R-L(R)$ 的子集，由引理，$\bar{B}=B/P'$ 必含有一非零幂零理想 $\bar{B}_0$，即B有一理想 $B_0\subseteq P'$，但有正整数 n，使 $B_0^n\subseteq P'$．令 $N=RB_0+B_0$，则N为R的一个左理想，且 $N\not\subseteq P$，但 $N^n=(RB_0+B_0)^n=((A+B)B_0+B_0)^n\subseteq P+B_0^n=P$，此为不可能，因为P是R的质理想．

再进一步证明R没有质理想．如R有一质理想P，由上述 $A\not\subseteq P$，任取A的一元素 $x\bar{\in}P$，令 $J=xR+Zx$，则 $J^2\subseteq xR$，但 $x\in A$，故 Rx 是诣零的，于是 xR 也是诣零的．所以 J 中任一元素都是幂零元，所以 J 是R的诣零右理想．令 $M=\{{}^{\perp}x \mid x\in J,\ x\bar{\in}P\}$，由〔1〕，M有极元素，设为 ${}^{\perp}a$，$a\in J$，但 $a\bar{\in}P$，我们要证明，对任何 $r\in R$，$(ar)^2\ P$．

如有 $r\in R$，$ar\bar{\in}P$，因为 $a\in J$，故 $ar\in J$，则由 ${}^{\perp}(ar)\supseteq{}^{\perp}a$ 及 ${}^{\perp}a$ 的极大性知 ${}^{\perp}(ar)={}^{\perp}a$，因为 J 是诣零的，故存在正整数 $n>1$，使 $(ar)^n=0$，但 $(ar)^{n-1}\neq 0$．同时也有一正整数 k（$1<k\leq n$）使 $(ar)^k\in P$，但 $(ar)^{k-1}\bar{\in}P$，因为 $(ar)^{k-1}$ 也为 ar 的形式，故 ${}^{\perp}((ar)^{k-1})={}^{\perp}a$．但 $(ar)^{n-k+1}\in{}^{\perp}((ar)^{k-1})={}^{\perp}$，所以 $(ar)^{n-k+1}a=0$，于是 $(ar)^{n-k+2}=0$．由我们对 n 的选

择，必有$n-k+2\geq n$，即$k\leq 2$．至此，我们证明了对任何$r\in$R，$(ar)^2\in$P，所以R/P中右理想aR+P的上指数≤ 2，由〔4〕知，若aR$\not\subseteq$P，则R/P必含非零幂零右理想，此与R/P为质环相矛盾。故aR$\subseteq$P，从而$a\in$P，矛盾。

最后证R是诣零的，如不然，则必有$r\in$R，对任何正整数n，都有$r^n\neq 0$．设S为R的所有不含r各幂的理想子环的集合．显然S非空，因为至少有零理子环．由Zorn引理，S有极大元素，设为P，现证P就是R的一个质理想．

设有R的两个非零理想I，J，I$\not\subseteq$P，J$\not\subseteq$P，则I+P与J+P均为R的理想，且都含有P，由P的极大性知必有正整数m，n，使$r^m\in$I+P，$r^n\in$J+P，于是$r^{m+n}\in$(I+P)(J+P)，由于$r^{m+n}\in$P，所以IJ$\not\subseteq$P．于是我们证明了P为质理想，因为我们前面已证明了R没有质理想，所以R必是诣零的．

由引理的推论，我们知R必为局部幂零的，至此定理证毕．

致谢：本文在写作过程中曾得到吉林大学郭元春同志的帮助，在此谨致谢意．

参考文献

〔1〕许永华，关于Köthe问题及幂零性问题，中国科学 3(1983)，125—201.

〔2〕Kegel,O.H., Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe, Math. Ann. 149(1963)，258—260.

〔3〕Herstein, I.N.and Small, L.W., Nil Rings Satisfying Certain Chain Conditions, Canad.J. Math., 16(1964)，771—776.

〔4〕谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982年，483—484.

Rings Satisfying the Inductive Condition for Homomorphic Chain of Left R—Modules

Zhang Binlong(张滨龙)

Abstract

In this paper, the following results are obtained

Theorem 1 Let L(R) be the Levitzki radical of the ring R, then L(R) contains every nil one—sided ideal of R if and only if R satisfies the inductive condition for homomorphic chain of left R—modules on every Levitzki subset.

Theorem 2 Let ring R=A+B, where A is a nil left ideal and B is a nil subrin of R, then R is locally nilpotent if and only if R satisfies the inductive condition for homomorphic chain of left R--modules on every subset of R−L(R).