拟共形扩张Σ'_k类逆函数的系数*

程宝龙

（中南工业大学）

设$w=g(Z)=Z+\sum_{n=1}^{\infty}b_nZ^{-n}\in\sum'_k$. 其逆函数为$G(w)=w+\sum_{n=1}^{\infty}B_nw^{-n}$.

本文准确地估计了$|B_5|$、$|B_7|$、$|B_9|$、$|B_{11}|$、$|B_{13}|$、$|B_{21}|$，找出极值函数．进而，对$|B_{2n-1}|$的估计作出了猜测．

1．引言　设Σ'表示$1<|z|<\infty$内单叶亚纯函数

$$g_0(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^{-n} \tag{1.1}$$

所组成的函数类。对$0\leqslant k<1$，Σ'中能向单位圆内进行k一拟共形扩张的函数构成子簇Σ'_k。对$w=g(z)\in\Sigma'_k$，有逆函数

$$G(w)=w+\sum_{n=1}^{\infty}B_nw^{-n}\ . \tag{1.2}$$

G. Schober[1]曾建立过不等式：

$$\left|B_{2n-1}\right|\leqslant\frac{k\cdots\cdots(k+n-1)}{n!}+\sum_{m=1}^{n-2}\frac{k\cdots\cdots(k+m-1)}{m!}\left|B_n^{(-m)}\right|^2 \tag{1.3}$$

其中

$$B_n^{(-m)}=\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_\nu+\nu=n-m\\ k_1,\cdots,k_\nu,\nu\geqslant1}}(-1)^\nu\frac{(\nu+m-1)!}{\nu!(m-1)!}B_{k_1}\cdots\cdots B_{k_\nu}\ .$$

他用之估计了$|B_3|$、$|B_5|$、$|B_7|$、$|B_9|$、$|B_{11}|$、$|B_{13}|$、$|B_{15}|$．嗣后，谭德邻[2]与李有才[3]分别估得了$|B_{17}|$和$|B_{19}|$．

他们都没有深入去探讨和予测这些估计的精确性，这是令人为憾的．

本文先准确地估出$|B_{21}|$，求得极值函数．再对Σ'_k类逆函数的奇次项系数的估值提出猜测．作为例证，我们又将Schober的结果予以精确化．

2．定理和证明

定理　在上述情况下，有估计$|B_{21}|\leqslant16796k$．此中等号当且仅当函数是Σ'_k中的

$$F(Z)=\begin{cases}z+k/z\ , & |z|>1\ ,\\ z+k\bar{z}\ , & |z|\leqslant1\ .\end{cases} \tag{2.1}$$

证　先求得诸$B_{11}^{(-m)}(m=1,\cdots,9)$，再用Grünsky系数[4]去表示它们，经适当的计算、就有：

* 1983年12月30日收到，本文在中国科学院科学基金资助下完成．

$|B_{11}^{(-9)}|^2 \leqslant 8|b_1|^2$; $|B_{11}^{(-8)}|^2 \leqslant 64|b_2|^2$; $|B_{11}^{(-7)}|^2 \leqslant 490|b_{22}|^2 + 2205/2|b_1|^4$; $|B_{11}^{(-6)}|^2 \leqslant 360|b_{23}|^2 + 3240|b_1|^2|b_2|^2$;

$|B_{11}^{(-5)}|^2 \leqslant 1125|b_{33}|^2 + 6750|b_1|^2|b_{22}|^2 + 1/2|b_1|^4 + 3812|b_1|^6 + (1552 + 958|b_1|^2 + 508|b_1|^4)|b_2|^2$;

$|B_{11}^{(-4)}|^2 \leqslant 720|b_{34}|^2 + 6480|b_1|^2|b_{23}|^2 + (2880 + 8152|b_1|^2 + 14168|b_1|^4)|b_2|^2$;

$|B_{11}^{(-3)}|^2 \leqslant 36k^4 + 504k^2 + (72k^2 + 1008)|b_{44}|^2 + (486k^2 + 6804)|b_1|^2|b_{33}|^2 + (1164k^2 + 16296)|b_1|^4|b_{22}|^2 + (261/2k^2 + 1827)|b_1|^8 + (24k^2 + 336)|b_1|^2 + [117/2k + 468k^2 + (10491/2k + 3510k^2)|b_1|^2 + (3783k + 975)|b_1|^4]|b_2|^2$;

$|B_{11}^{(-2)}|^2 \leqslant (37k^2 + 1213)|b_{45}|^2 + (300k^2 + 9700)|b_1|^2|b_{34}|^2 + (18k^2 + 607 + 675k^2|b_1|^4 + 21825|b_1|^4)|b_{23}|^2 + (4749 + 1966k^2 + 56k^4 + 315k^2|b_1|^4 + 10206|b_1|^4 + 250k^2|b_1|^8 + 8084|b_1|^8)|b_2|^2 + (135k^2 + 4365)|b_8|^2 + (2343k^2 + 25782 + 50000|b_1|^2)|b_6|^2 + (28000|b_1|^4 + 34000|b_1|^2 + 10953)|b_4|^2$;

$|B_{11}^{(-1)}|^2 \leqslant 462k^4 + 8827/20k^2 + (107k^2 + 103)|b_{55}|^2 + (774k^2 + 738)|b_1|^2|b_{44}|^2 + (1016k^2 + 1937)|b_{33}|^4 + (2032k^2 + 1937)|b_1|^4|b_{33}|^2 + (1376k^2 + 1312)|b_{22}|^4 + (63k^2 + 245/2)|b_1|^2$.

于是

$\sum_{m=1}^{9}|B_{11}^{(-m)}|^2 \leqslant 498k^4 + 18907/20k^2 + (87k^2 + 1901)|b_1|^2 + 1103|b_1|^4 + 3812|b_1|^6 + (261k^2 + 1827)|b_1|^8 + [1268k^2 + 19147 + (1294k^2 + 25445)|b_1|^2 + (815k^2 + 19366)|b_1|^4 + (260k^2 + 3600)|b_1|^6]|b_2|^2 + (2256k^2 + 10953 + 34000|b_1|^2 + 28000|b_1|^4)|b_4|^2 + (2343k^2 + 25782 + 50000|b_1|^2)|b_6|^2 + (135k^2 + 4365)|b_8|^2 + [344k^2 + 818 + 6750|b_1|^2 + (1164k^2 + 16296)|b_1|^4]|b_{22}|^2 + [18k^2 + 967 + 6480|b_1|^2 + (675k^2 + 21825)|b_1|^4]|b_{33}|^2 + [112k^2 + 2467 + (225k^2 + 7202)|b_1|^2 + (2032k^2 + 1800)|b_1|^4 \cdot] \cdot |b_{13}|^2 + [100k^2 + 720 + (300k^2 + 9660|b_1|^2]|b_{34}|^2 + [72k^2 + 1008 + (774k^2 + 738)|b_1|^2]|b_{44}|^2 + (37k^2 + 1213)|b_{45}|^2 + (107k^2 + 103)|b_{55}|^2$.

经过调整，应用Σ_k'类的 Grunsky 不等式和面积原理，就得

$$\sum_{m=1}^{9}|B_{11}^{(-m)}|^2 \leqslant 16795 - k^2 + |b_1|^2. \tag{2.2}$$

将（1.3）改写为

$$|B_{2n-1}| \leqslant k\left\{1 + \sum_{m=1}^{n-2}|B_n^{(-m)}|^2\right\}. \tag{2.3}$$

在（2.3）中取$n = 11$，并以（2.2）代入，得

$$|B_{21}| \leqslant k\left(1 + \sum_{m=1}^{9}|B_{11}^{(-m)}|^2\right) \leqslant k(16796 - k^2 + |b_1|^2) \leqslant 16796k. \tag{2.4}$$

显见，当且仅当$b_1 = k$，$b_j \equiv 0$（$j = 2, \cdots$）时，亦即仅对Σ_k'类中由（2.1）式所示的函数才有$|B_{21}| = 16796k$. 定理证讫.

3. 猜测与例证 可以猜测：对Σ_k'类逆函数的奇次项系数将成立

命题K 对上述系数，将有

$$|B_{2n-1}| \leqslant \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}k. \tag{3.1}$$

等号成立当且仅当对Σ_k'类中由（2.1）式所示者.

作为例证，再考察B_5、B_7、B_9、B_{11}、B_{13}．顾及$B_3^{(-1)}$；$B_4^{(-1)}$、$B_4^{(-2)}$；$B_5^{(-1)}$、$B_5^{(-2)}$、$B_5^{(-3)}$；$B_6^{(-1)}$、$B_6^{(-2)}$、$B_6^{(-3)}$、$B_6^{(-4)}$；$B_7^{(-1)}$、$B_7^{(-2)}$、$B_7^{(-3)}$、$B_7^{(-4)}$、$B_7^{(-5)}$的表达式，仍用Grunsky 系数去表示，类于前述手法，从（2.3）得

$$|B_5|\leqslant k(1+|b_1|^2)\leqslant k(2-k^2+|b_1|^2)\leqslant 2k. \tag{3.2}$$

$$|B_7|\leqslant k(1+|B_4^{(-1)}|^2+|B_4^{(-2)}|^2\leqslant k(1+|b_2|^2+4|b_1|^2\leqslant k(5-k^2+|b_1|^2)\leqslant 5k. \tag{3.3}$$

$$|B_9|\leqslant k(1+\sum_{m=1}^{3}|B_5^{(-m)}|^2)\leqslant k(1+4|b_{22}|^2+3|b_1|^4+4|b_2|^2+9|b_1|^2)\leqslant k(14-k^2+|b_1|^2)\leqslant 14k. \tag{3.4}$$

$$|B_{11}|\leqslant k\left(1+\sum_{m=1}^{4}|B_6^{(-m)}|^2\right)\leqslant k(1+5|b_{23}|^2+20|b_1|^2|b_2|^2+20|b_{22}|^2+20|b_1|^4+9|b_2|^2+16|b_1|^2)\leqslant k(42-k^2+|b_1|^2)\leqslant 42k. \tag{3.5}$$

$$|B_{13}|\leqslant k\left(1+\sum_{m=1}^{5}|B_7^{(-m)}|^2\right)\leqslant k[1+25|b_1|^2+50|b_1|^2|b_{22}|^2+271|b_1|^4+65/6|b_1|^6+54|b_{22}|^2+15|b_{33}|^2+(101+135|b_1|^2)|b_2|^2]\leqslant k(132-k^2+|b_1|^2)\leqslant 132k. \tag{3.6}$$

这些估式既表明$n=3$、4、5、6、7时命题K为真，又从根本意义上精确了Schober已得的结果．

从目前状况看来，对 $n\leqslant 16$，命题K将不难证明．

值得指出的是、命题K一旦成立，将说明$|B_{2n-1}|$不仅与n而且将与k有关．于是，对每个固定的n，$k\to 1$ 时将有$|B_{2n-1}|\to(2n-2)!/n!(n-1)!$；$k\to 0$时将迫使$|B_{2n-1}|\to 0$．顾及拟共形映照中$k$与K的关系．可以断言：命题K的成立意味着在实行与共形映照愈相近似的拟共形扩张时，$|B_{2n-1}|$将愈小，而在实行K很大的拟共形扩张时，$|B_{2n-1}|$将愈接近于$(2n-2)!/n!(n-1)!$．

参 考 文 献

〔1〕G. Schober, Kodai Math. J. 2(1979), 411—419.
〔2〕谭德邻，复旦大学学报（自然科学版），V. 21. 1(1982).
〔3〕李有才，湖南数学年刊，V. 3. 1(1983).
〔4〕Ch. Pommerenke,"Univalent functions"。Vandenhoeck and Ruprecht, Gottingen, 1975.