矩阵变换中的一些问题*

杨 安 洲 俞 宗 源
（北京工业大学） （贵州大学）

令 n 是自然数，命 $\mathbf{M}=\{A; A$ 是复数域上的 $(n\times n)$ 的矩阵$\}$，$\mathbf{P}=\{P; P\in\mathbf{M}\&\det(P)\neq 0\}$，任意地取定 $P_0\in\mathbf{P}$，对于 $\mathbf{M}$ 可以定义以下 4 种广义的变换：

定义 1 — 4 对于 $A\in\mathbf{M}$，令 $f_1(A)=P_0^{-1}P^{-1}P_0AP$，$P\in\mathbf{P}$，称 f_1 是具有参量 P_0 的相似变换（或叫广义的相似变换），以 A 为代表的广义的相似类（相似的“等价类”）$\hat{A}=\{P_0^{-1}P^{-1}P_0AP; P\in\mathbf{P}\}$；广义的合同变换 $f_2(A)=P_0^{-1}P'P_0AP$，广义的合同的等价类 $\hat{A}=\{P_0^{-1}P'P_0AP; P\in\mathbf{P}\}$；广义的Hermite变换 $f_3(A)=P_0^{-1}\bar{P}'P_0AP$，(H) 类 $\hat{A}=\{P_0^{-1}\bar{P}'P_0AP; P\in\mathbf{P}\}$；广义的许宝禄变换 $f_4(A)=P_0^{-1}\bar{P}^{-1}P_0AP$，(S) 类 $\hat{A}=\{P_0^{-1}P^{-1}P_0AP; P\in\mathbf{P}\}$．

对于以上 4 种广义的变换可以提出以下的五类题目（研究的课题）：

问题 1 — 5 每一种广义变换下的标准形（正规形式）问题；对角化问题；同时对角化问题；同时上三角化（下三角化、三角化）问题；同时标准形化问题．

因为，我们知道有下面的定理成立：

定理 （1）若 φ 是 $\mathbf{P}$ 的反自同构映射（$\mathbf{P}$ 在矩阵乘法下成为群），则可定义矩阵变换 $f(A)=\varphi(P)AP$，称 f 是由 φ 所产生的变换．（2）例如，对任给定的 $P_0\in\mathbf{P}$，以下的 8 个映射均是 $\mathbf{P}$ 的反自由同构映射 $\varphi_1(P)=P^{-1}$，$\varphi_2(P)=P'$，$\varphi_3(P)=\bar{P}'$，$\varphi_4(P)=\bar{P}^{-1}$，$\varphi_5(P)=P_0^{-1}P^{-1}P_0$，$\varphi_6(P)=P_0^{-1}P'P_0$，$\varphi_7(P)=P_0^{-1}\bar{P}'P_0$，$\varphi_8(P)=P_0^{-1}\bar{P}^{-1}P_0$，由 φ_1 至 φ_8 所产生的变换就是前头的定义 1 — 4 中所说的广义的 4 种变换（包括通常的相似、合同、(H)、(S) 变换在内，只要取 P_0 为单位矩阵即得．（3）自同构映射与反自同构映射的“复合”(函数的复合）是反自同构映射．（4）若已有了 P 的一个反自同构（逆自同构）映射 φ，则可定义按 φ 的等价类（或由 φ 所产生的 f 等价类）$\hat{A}=\{\varphi(P)AP; P\in\mathbf{P}\}$，等等．所以，可提出以下的两个题目（可供研究的课题）：

问题 1 试找出所有的 $\mathbf{P}$ 的反自同构映射（逆自同构映射），如何明确地表示出所有的 $\mathbf{P}$ 的反自同构映射与所有的 $\mathbf{P}$ 的自同构映射；所有的 $\mathbf{P}$ 的反自同构与自同构所组成的群的最小生成集问题（极小的生成集问题）．

问题 2 对于任一由反自同构映射 φ 所产生的矩阵变换 f 来说，类似于前头的对于 4 种广义的矩阵变换所提过的问题，也是值得研究的题目（更大一些、更复杂一些的研究课题）．

假如适当地代替 $\mathbf{M}$ 与适当地代替 $\mathbf{P}$ 等等，则同样也有好多问题值得我们研究．

* 1986年 6 月14日收到．