关于随机多值映象的不动点定理*

刘作述　　陈绍仲

（武汉城建学院）（成都科技大学数学系）

自六十年代末起，随机单值映象的不动点定理与映象族的公共不动点定理的研究已有不少进展[1-4]，并创立了许多方法与技巧，近年来，关于随机多值映象的研究也正在引起数学工作者们的注意并已取得一些成果[5-7]， 本文的目的是用与上述作者们不同的方法去建立两个随机多值映象的不动点定理，它将文〔8〕的相应结果随机化了．我们知道，在随机分析中不动点的存在性、唯一性通常可由决定性算子中的相应理论来保证，关键往往是证明不动点的可测性，然而可测性的证明常常并不是件容易的事，在本文中我们采用聚点集的概念，即引进了函数$H(\omega)$，它使我们能较简便地处理多值映象的不动点的可测性问题，特别是可处理目前文献中讨论得不多的弱收敛序列极限的可测性问题（见定理2）．

在本文中，我们将作如下假设：

（1） (X,d) 是一polish 空间，即是一可分完备距离空间；

（2） $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 是一完备概率空间；

（3） $\forall x\in X$，$B\subset X$，我们定义 $d(x,B)=\inf\{d(x,y): y\in B\}$，令 $CB(X)=\{A: A\subseteq X\wedge A\neq\phi\wedge A$ 闭有界$\}$，$K(X)=\{A: A\in CB(X)\wedge A$ 是紧的$\}$．$(CB(X),D)$，$(K(X),D)$ 是距离空间，其中D是 $CB(X)$ 上（相应地 $K(X)$上）由 d 诱导的Hausdorff 距离，一个映象 $T:\Omega\to CB(X)$ 是说（$\mathscr{A}$-）可测的，如对X的任意开子集B，$T^{-1}(B)=\{\omega: T(\omega)\cap B\neq\phi\}\in\mathscr{A}$．在文〔9〕中上述可测性称之为弱可测性，因本文不涉及其它可测性故简称为可测；

（4） $T:\Omega\times X\to CB(X)$（或 $K(X)$）满足：

（i） $\forall\omega\in\Omega, T(\omega,\cdot): (X,d)\to(CB(X),D)$ 是连续的；

（ii） $\forall x\in X$，$T(\cdot,x):\Omega\to CB(X)$ 是一多值可测映象．

定义1 满足（4）中（i）与（ii）的映象 $T:\Omega\times X\to CB(X)$ 称作连续随机多值映象．

连续随机多值映象有下列性质[6]：

引理1 令 $\{T_n\}$ 是可测映象序列 $T_n:\Omega\to CB(X)$，且 $T:\Omega\to CB(X)$ 是一映象使得 $\forall\omega\in\Omega$，$\lim\limits_{n\to\infty}D(T_n(\omega),T(\omega))=0$，则$T$是可测的．

引理2 令 $T:\Omega\times X\to CB(X)$ 是一连续随机多值映象且$U:\Omega\to X$是一可测映象，则用 $G(\omega)=T(\omega, U(\omega))$ 定义的映象$G:\Omega\to CB(X)$是可测的．

引理1,2 可按〔6〕中的类似方法证明之．

* 1981年11月6日收到．1982年5月3日收到修改稿．

§1．在紧距离空间中的随机不动点

在本节中我们总假定X是紧的．

定理1．设 $T: \Omega\times X\to CB(X)$ 是一连续随机多值映象，$\forall\omega\in\Omega$，T 是一非扩张映象，即 $\forall x, y\in X$．

$$(\mathrm{I})\quad \begin{aligned} D(T(\omega, x), T(\omega, y)) < \sup\{ & d(x, y), d(x, T(\omega, x)), \\ & (y, T(\omega, y)), \tfrac{1}{2}d(x, T(\omega, y)) + \tfrac{1}{2}d(y, T(\omega, x))\} \end{aligned}$$

则存在一可测映象 $\hat{x}=\Omega\to X$，使得 $\forall\omega\in\Omega$，$\hat{x}(\omega)\in T(\omega, \hat{x}(\omega))$．

我们称映象 $\hat{x}(\omega)$ 是连续随机多值映象 T 的随机不动点．首先，我们证明下列引理：

引理3 设 $X_n: \Omega\to X$ 是一可测映象列，则下列多值映象 $H: \Omega\to CB(X)$，$H(\omega)=\{x: x$ 是 $\{x_n(\omega)\}$ 的极限点$\}$ 是可测的．

证 $\forall\omega\in\Omega$，因X是紧的则 $H(\omega)$ 是非空有界闭集．对于X的任意开子集B，我们可构造一非减的X的闭子集序列 B_n，使得 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$，$B_n\subset B_{n+1}^0$，$n=1,2,\cdots$．令 $\{y_j: j=1,2,\cdots\}$ 是X的稠子集，我们将证明下之等式：

$$(5)\quad \{\omega: H(\omega)\cap B\neq\phi\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{y_j\in B_n}\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=l}^{\infty}\{\omega: d(x_k(\omega), y_j)<\frac{1}{m}\}$$

当 $H(\omega)\cap B\neq\phi$，则存在一点 $x_0\in H(\omega)$ 和整数 n 使得 $x_0\in B_n^0$ 且对任意 $m\geqslant1$ 存在一点 $y_j\in B_n$ 和一子序列 $\{x_{k_p}(\omega)\}$ 使得 $d(y_j, x_0)<\frac{1}{2m}$，$d(x_{k_p}(\omega), x_0)<\frac{1}{2m}$，则我们有

$$d(y_j, x_{k_p}(\omega))<\frac{1}{m}.$$

于是我们得到

$$\{\omega: H(\omega)\cap B\neq\phi\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{y_j\in B_n}\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=l}^{\infty}\{\omega: d(x_k(\omega), y_j)<\frac{1}{m}\}$$

相反地如果 ω 属于（5）之右端，则存在 B_n 且对任意 $m\geq1$ 存在一 $y_{j(m)}\in B_n$ 和一子序列 $\{x_{k_p^{(m)}}(\omega)\}$ 使得

$$d(x_{k_p^{(m)}}(\omega), y_{j(m)})<\frac{1}{m}\quad p=1,2,\cdots$$

显然不妨设 $k_m^{(m)}<k_{m+1}^{(m+1)}$．于是若令 $k^{(m)}=k_m^{(m)}$，则 $\{x_{k^{(m)}}(\omega)\}$是 $\{x_n(\omega)\}$ 的一子序列，

$$d(x_{k^{(m)}}(\omega), y_{j(m)})<\frac{1}{m}\quad m=1,2,\cdots$$

因X是紧的，则存在一点 $z_0\in X$ 使得

$$d(y_{j(m_l)}, z_0)\to0,\ d(x_{k^{(m_l)}}(\omega), z_0)\to0\quad(l\to\infty)$$

因 $y_{j(m)}\in B_n$，则 $z_0\in B_n\subset B$，而 z_0 是序列 $\{x_k(\omega)\}$ 的极限点，则 $z_0\in H(\omega)$．于是

$$z_0\in H(\omega)\cap B,\ 即\ H(\omega)\cap B\neq\phi$$

因而

$$\{\omega: H(\omega)\cap B\neq\phi\}\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{y_j\in B_n}\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega: d(x_k(\omega), y_j)<\frac{1}{m}\}$$

由于 $x_k(\omega)$ 是可测的，则 $d(x_k(\omega), y_j)$ 也是可测的[9]，则 $\{\omega: d(x_k(\omega), y_j)<\frac{1}{m}\}\in\mathscr{A}$，于是 $\{\omega: H(\omega)\cap B\neq\phi\}\in\mathscr{A}$ 并且 $H(\omega)$ 是可测的．

引理4 设 $x: \Omega\to X$ 是可测映象，$T: \Omega\to CB(X)=K(X)$ 是一可测多值映象，则存在一可测选择 y，$y(\omega)\in T(\omega)$ 使得

$$d(x(\omega),y(\omega))=d(x(\omega),T(\omega))$$

证 $\forall n\geq 1$，仿〔6〕之命题 4 的证明我们可选一可测选择 x_n，$x_n(\omega)\in T(\omega)$ 使得

$$d(x(\omega),x_n(\omega))\leq d(x(\omega),T(\omega))+\frac{1}{n}.$$

对任意 $\omega\in\Omega$，令

$$\mathrm{H}(\omega)=\{x: x\text{ 是 }\{x_n(\omega)\}\text{ 的极限点}\},$$

由引理 3 我们得到 H 是可测的，于是存在一可测选择 y，$y(\omega)\in\mathrm{H}(\omega)$．$\forall\omega\in\Omega$，因为 $y(\omega)\in\mathrm{H}(\omega)$，则我们可选一子序列 $x_{n_k}(\omega)\to y(\omega)$（当 $k\to\infty$），则

$$d(x(\omega),y(\omega))=\lim_{k\to\infty}d(x(\omega),x_{n_k}(\omega))\leq\lim_{k\to\infty}(d(x(\omega),T(\omega))+\frac{1}{n_k})$$
$$=d(x(\omega),T(\omega))\leq d(x(\omega),y(\omega))$$

从而得到 $d(x(\omega),y(\omega))=d(x(\omega),T(\omega))$

定理 1 的证明 设 $x_1(\omega)$ 是一任意可测映象，因为 $T(\cdot,x_1(\cdot))$ 可测，根据引理 4 我们可找到一可测选择 x_2，使得

$$x_2(\omega)\in T(\omega,x_1(\omega)),\quad d(x_1(\omega),x_2(\omega))=d(x_1(\omega)),T(\omega,x_1(\omega))).$$

应用类似的方法我们可得一可测映象序列 $\{x_n(\cdot)\}$，使得 $\forall\omega\in\Omega$，$n=1,2,\cdots$

$$x_{n+1}(\omega)\in T(\omega,x_n(\omega)),\quad d(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega))=d(x_n(\omega),T(\omega,x_n(\omega))),$$

对于任意 $\omega\in\Omega$，令 $\mathrm{H}(\omega)=\{x: x\text{ 是 }\{x_n(\omega)\}\text{ 的极限点}\}$．由引理 3 我们知道 $\mathrm{H}(\cdot)$ 是可测的，令 $\hat{x}$ 是 $\mathrm{H}(\omega)$ 的可测选择，则 $\forall\omega\in\Omega$，$\hat{x}(\omega)$ 是序列 $\{x_n(\omega)\}$ 的极限点，根据〔8, th7〕我们有

$$\hat{x}(\omega)\in T(\omega,\hat{x}(\omega))$$

§2 在自反 Opial 空间中的随机不动点

在这一节，我们假定 X 是一自反的 Opial 空间，即满足条件：对于任何 $x_n\xrightarrow{w}x$（表 x_n 弱收敛于 x），如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-z\|\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-x\|,$$

则 $z=x$ 的自反的 Banach 空间．

引理 5 设 X 是一自反 Opial 空间，令 T: X→K(X) 是一连续多值映象，$\forall x_n\xrightarrow{w}x(n\to\infty)$．如果对 $\{x_n\}$ 的任何子序列 $\{x_{n_k}\}$，都有 $\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k},T(x))\leq\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k},x)$，则

$$x\in T(x).$$

证 因 $T(x)$ 是紧的，$\forall n$ 存在 $y_n\in T(x)$ 使得 $d(x_n,T(x))=d(x_n,y_n)$，且存在一子序列 $y_{n_k}\to y_0\in T(x)$（当 $k\to\infty$），因而

$$d(x_{n_k},y_0)\leq d(x_{n_k},y_{n_k})+d(y_{n_k},y_0),$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k},y_0)\leq\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k},y_{n_k})=\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k},T(x))\leq\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k},x).$$

因 X 是 Opial 空间，则 $x=y_0\in T(x)$．

定理 2 设 X 是一自反的可分 Opial 空间，令 $T:\Omega\times\mathrm{X}\to\mathrm{K}(\mathrm{X})$ 是一连续随机多值映象且满足下列条件：存在一正数 $\beta<1$，使得 $\forall x,y\in\mathrm{X}$，$\omega\in\Omega$

$$D(T(\omega,x),T(\omega,y))<(1-\beta)\sup\{d(x,y),$$

(Ⅱ) $$\frac{1}{2}d(x,T(\omega,x))+\frac{1}{2}d(y,T(\omega,y)),\ \frac{1}{2}d(x,T(\omega,y))+\frac{1}{2}d(y,T(\omega,x))\}+\frac{\beta}{2}\{d(x,T(\omega,y))+d(y,T(\omega,x))\},$$

则 (i) 对任一可测映象 $x_0:\Omega\to X$，我们可选择一可测映象序列 $\{x_n\}$ 使得 $\forall n\geq 0$,

$$x_{n+1}(\omega)\in T(\omega,x_n(\omega)),\quad d(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega))=d(x_n(\omega),T(\omega,x_n(\omega)))$$

(ii) 如$x_n:\Omega\to X$, $n==1,2,\cdots$满足条件 (i) 且 $\forall\omega\in\Omega$, $x_n(\omega),n=1,2,\cdots$是有界的，则存在一可测映象$\hat{x}:\Omega\to X$，使得 $\forall\omega\in\Omega$, $\hat{x}(\omega)\in T(\omega,\hat{x}(\omega))$

证 由引理4，(i)是显然的，现在我们证明 (ii). $\forall\omega\in\Omega$，利用 (Ⅱ) 我们得到

$$\begin{aligned}d(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega))&=d(x_n(\omega),T(\omega,x_n(\omega)))\leq D(T(\omega,x_{n-1}(\omega)),T(\omega,x_n(\omega)))\\&\leq(1-\beta)\sup\{d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega)),\ \frac{1}{2}d(x_{n-1}(\omega),T(\omega,x_{n-1}(\omega)))+\\&+\frac{1}{2}d(x_n(\omega),T(\omega,x_n(\omega))),\ \frac{1}{2}d(x_{n-1}(\omega),T(\omega,x_n(\omega)))+\frac{1}{2}d(x_n(\omega),\\&T(\omega,x_{n-1}(\omega)))\}+\frac{\beta}{2}d(x_{n-1}(\omega),T(\omega,x_n(\omega)))+\frac{\beta}{2}d(x_n(\omega),T(\omega,x_{n-1}(\omega)))\\&\leq(1-\beta)\sup\{d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega)),\ \frac{1}{2}d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega))+\frac{1}{2}d(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega))\\&+\frac{\beta}{2}d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega))+\frac{\beta}{2}d(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega))\end{aligned}\tag{6}$$

注意上述不等式和 $\beta>0$ 我们可得

$$d(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega))\leq d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega)),$$

于是我们可假设 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega))=r$. 对于任意整数 $k\geq 1$，易证

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,d(x_n(\omega),x_{n+k}(\omega))\leq kr\tag{7}$$

另一方面，利用 (Ⅱ) 并注意 (6) 和$\frac{\beta}{2}d(x_n(\omega),T(\omega,x_{n-1}(\omega)))=0$，可得

$$d(x_n(\omega),T(\omega,x_n(\omega)))\leq(1-\beta)d(x_{n-1}(\omega),x_n(\omega)+\frac{\beta}{2}d(x_{n-1}(\omega),T(\omega,x_n(\omega)))$$

令 $n\to\infty$，我们有

$$r\leq(1-\beta)r+\frac{\beta}{2}\underline{\lim_{n\to\infty}}\,d(x_{n-1}(\omega),T(\omega,x_n(\omega))),$$

则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,d(x_{n-1}(\omega),T(\omega,x_n(\omega)))=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,d(x_n(\omega),T(\omega,x_{n+1}(\omega)))\geq 2r,$$

因而

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,d(x_n(\omega),x_{n+2}(\omega))\geq\underline{\lim_{n\to\infty}}\,d(x_n(\omega),T(\omega,x_{n+1}(\omega)))\geq 2r.$$

由 (7) 式，我们便得

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n(\omega),x_{n+2}(\omega))=\lim_{n\to\infty}d(x_n(\omega),T(\omega,x_{n+1}(\omega)))=2r.$$

于是由归纳法，利用 (Ⅱ) 式可以证明

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n(\omega),x_{n+k}(\omega))=\lim_{n\to\infty}d(x_n(\omega),T(\omega,x_{n+k-1}(\omega)))=kr.$$

因为 $\{x_n(\omega)\}$ 是有界的，则 $r=0$、即 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega))=0$.

又因 $\{x_n(\omega)\}$是有界的，则$\{x_n(\omega)\}$是弱紧的[10]. 固定 $\omega\in\Omega$，我们可选取 $x_{n_k}(\omega)\xrightarrow{w}\hat{x}(\omega)$,

$$d(x_{n_k}(\omega),T(\omega,\hat{x}(\omega)))\leq D(T(\omega,x_{n_k-1}(\omega)),T(\omega,\hat{x}(\omega)))\leq$$

$$\leq (1-\beta)\sup\{d(x_{n_k-1}(\omega),\hat{x}(\omega)),\ \frac{1}{2}d(x_{n_k-1}(\omega),T(\omega,x_{n_k-1}(\omega)))$$
$$+\frac{1}{2}d(\hat{x}(\omega),T(\omega,\hat{x}(\omega))),\ \frac{1}{2}d(\hat{x}(\omega),T(\omega,x_{n_k-1}(\omega)))$$
$$+\frac{1}{2}d(x_{n_k-1}(\omega),T(\omega,\hat{x}(\omega)))\}+\frac{\beta}{2}d(\hat{x}(\omega),T(\omega,x_{n_k-1}(\omega)))$$
$$+\frac{\beta}{2}d(x_{n_k-1}(\omega),T(\omega,\hat{x}(\omega)))\leq \sup\{d(x_{n_k-1}(\omega),\hat{x}(\omega)),$$
$$\frac{1}{2}d(x_{n_k-1}(\omega),T(\omega,x_{n_k-1}(\omega)))+\frac{1}{2}d(\hat{x}(\omega),T(\omega,\hat{x}(\omega))),$$
$$\frac{1}{2}d(\hat{x}(\omega),T(\omega,x_{n_k-1}(\omega)))+\frac{1}{2}d(x_{n_k-1}(\omega),T(\omega,\hat{x}(\omega)))\}$$

令 $n\to\infty$ 我们有[11]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}d(x_{n_k}(\omega),T(\omega,\hat{x}(\omega)))\leq \sup\{\overline{\lim_{n\to\infty}}d(x_{n_k-1}(\omega),\hat{x}(\omega))$$
$$\frac{1}{2}d(\hat{x}(\omega),T(\omega,\hat{x}(\omega))),\ \frac{1}{2}\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k}(\omega),\hat{x}(\omega))+$$
$$\frac{1}{2}\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k}(\omega),T(\omega,x_{n_k-1}(\omega)))+\frac{1}{2}\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k}(\omega),T(\omega,\hat{x}(\omega)))+$$
$$\frac{1}{2}\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k-1}(\omega),x_{n_k}(\omega))\}\leq \sup\{\overline{\lim_{k\to\infty}}\ d(x_{n_k}(\omega),\hat{x}(\omega)),\ \frac{1}{2}d(\hat{x}(\omega),T(\omega,x(\omega))),$$
$$\frac{1}{2}\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k}(\omega),\hat{x}(\omega))+\frac{1}{2}\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k}(\omega)T(\omega,\hat{x}(\omega)))\}$$

比较上述不等式两边我们可得：

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k}(\omega),T(\omega,\hat{x}(\omega)))\leq \overline{\lim_{k\to\infty}}d(x_{n_k}(\omega),\hat{x}(\omega))$$

注意上述推理对 $\{x_{n_k}\}$ 的任何子序列均成立，故由引理5得：

$$\hat{x}(\omega)\in T(\omega,\hat{x}(\omega)) \tag{9}$$

下面我们证明 $\hat{x}(\omega)$ 可以是一可测映象，令

$$\mathrm{H}(\omega)=\{x: x \text{ 是 } \{x_n(\omega)\} \text{ 的弱极限点}\}$$

由于X是自反可分的，所以 X^* 也是可分的，我们选取 $\{f_n: n=1,2,\cdots\}\subset X^*$ 且稠于 $X^*\cap\{f: f\in X^*, \|f\|\leq 1\}$，令

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|f_n(x)-f_n(y)|\quad \forall x,y\in X$$

我们将证明下列等式

$$\{\omega: \mathrm{H}(\omega)\cap \mathrm{B}\neq\phi\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\ \bigcup_{y_i\in \mathrm{B}}\ \bigcap_{l=1}^{\infty}\ \bigcup_{k=l}^{\infty}\{\omega: \rho(x_{n_k}(\omega),y_i)<\frac{1}{m}\}$$ 其中 $\mathrm{B}=\{x: x\in X, \|x\|\leq r\}$，$y_i$，$i=1,2,\cdots$ 在X中稠.

如果 $\mathrm{H}(\omega)\cap\mathrm{B}\neq\phi$，则存在一点 $x_0\in\mathrm{H}(\omega)\cap\mathrm{B}$，因 $x_0\in\mathrm{H}(\omega)$，则存在 $\{x_n(\omega)\}$ 的一子序列 $\{x_{n_k}(\omega)\}$ 使得：$x_{n_k}(\omega)\xrightarrow{w}x_0$（当 $k\to\infty$）即 $\forall f\in X^*$ 我们有

$$f(x_{n_k}(\omega))-f(x_0)\to 0 \quad (\text{当 } k\to\infty)$$

另一方面 $x_0\in\mathrm{B}$，我们又可选取一子序列 $y_{j_k}\in\mathrm{B}$ 使得 $y_{j_k}\to x_0(k\to\infty)$，于是 $\forall f\in X^*$ 我们也有

$$f(y_{j_k})-f(x_0)\to 0 \quad (\text{当 } k\to\infty)$$

所以我们有

$$\rho(x_{n_k}(\omega),y_{j_k})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|f_n(x_{n_k}(\omega)-f_n(y_{j_k})|\to 0 \quad (\text{当 } k\to\infty)$$

则 $\forall m\geq 1$ 存在一点 $y_j\in B$ 和一子序列 $\{x_{n_k}(\omega)\}$ 使得 $e(x_{n_k}(\omega), y_j)<\frac{1}{m}$，因而

$$\omega\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{y_j\in B}\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega:\rho(x_k(\omega), y_j)<\frac{1}{m}\}$$

相反的，如 ω 属于上述 ω—集，则存在 $y_{j_k}\in B$，$k=1,2,\cdots$ 和一子序列 $x_{n_k}(\omega)$ 使得

$$\rho(x_{n_k}(\omega), y_{j_k})\to 0\quad(\text{当 } k\to\infty)$$

因 B 是有界的所以 B 是弱紧的不妨设存在一点 $y_0\in B$ 使得 $y_{j_k}\xrightarrow{w}y_0$[10]．于是我们得到 $\rho(y_{j_k}, y_0)\to 0$ （当 $k\to\infty$），则 $\rho(x_{n_k}(\omega), y_0)\to 0$ （当 $k\to\infty$）

因 $\{x_{n_k}(\omega)\}$ 是有界的且 $\forall n=1,2,\cdots$

$$|f_n(x_{n_k}(\omega)-f_n(y_0)|\leq 2^n\rho(x_{n_k}(\omega), y_0)\to 0\quad(k\to\infty)$$

所以

$$x_{n_k}(\omega)\xrightarrow{w}y_0\quad\text{且 } y_0\in H(\omega),\ H(\omega)\cap B\neq\phi$$

又因 $\forall f\in X^*$，f 是连续的，则对于固定的 $y\in X$，$\rho(x,y)$ 是连续的且 $\rho(x_k(\omega), y)$ 是可测的，所以 $\{\omega:\rho(x_k(\omega), y_j)<\frac{1}{m}\}\in\mathscr{A}$，则

$$\{\omega:H(\omega)\cap B\neq\phi\}\in\mathscr{A}$$

因此 $H(\omega)$ 是可测的，$\forall\omega\in\Omega$，$\{x_n(\omega)\}$ 是有界的，所以 $H(\omega)$ 非空，故我们可选择一可测选择 $\hat{x}(\omega)\in H(\omega)$．由此我们证明了，对于固定的 $\omega\in\Omega$，存在一序列 $x_{n_k}(\omega)\xrightarrow{w}\hat{x}(\omega)$ （$k\to\infty$）并且由（9）式知 $\hat{x}(\omega)\in T(\omega,\hat{x}(\omega))$．

参 考 文 献

[1] Bharucha-Reid, A. T, Random Integral Equations, Academic Press New York and London, 1972.

[2] 王梓坤，随机泛函分析引论，数学进展，5(1962) 1, 45—71.

[3] 刘作述，关于可分 Banach 空间中连续随机算子的逼近定理，四川大学学报，(1979). No. 2, 47—63.

[4] Bharucha-Reid. A. T, Fixed Point Theorems in Probabilistic Analysis, Bull. of the Amer. Math. Soc., 82(1976).

[5] Lakshmikantham, V, Nonlinear Equations in Abstract Spaces, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978, 67—80.

[6] Itoh, S, A Random Fixed Point Theorem for a Multivalued Contraction Mapping, Pacif. J. Math. 68(1977), 85—90.

[7] Andrus, G. F. and Nishiura, T, Fixed Points of Random Set-Valued Maps, Nonlinear Analysi 3(1979), 65—72.

[8] 倪录群、姚景齐、赵汉章，压缩型映象的几个不动点定理，数学年刊，Vol.1, No.1 (1980), 63—74.

[9] Himmelberg, C. J, Measurable Relations, Fund. Math., 87(1975), 53—72.

[10] Hille, E, and Phillips, K. S, Functional Analysis and Semigroups, rev. ed., American Mathematical Society, Provideuce R. I., 1957.

[11] 张百生，关于随机分析中的一些不动点定理（I），四川大学学报，(1980) No. 3.

[12] Yosida, K, Functional Analysis, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.