集值映象的不动点与系统的周期解

杨 书 郎

（厦门大学计算机科学系）

本文研究局部凸空间中集值映象的不动点定理，并用于如下的系统（Ⅰ）的周期解研究

$$x'(t)=f(t,x(t)) \qquad (\mathrm{I})$$

§1 引 言

设X为（Hausdorff）局部凸空间（简记为 LCS）；Δ、$\Omega\subset X$；$T:\Delta\to\Omega$.

关于T的不动点，有以下两个重要结果：〔1〕中的定理4．5．1；〔3〕中的Glicksberg 不动点定理．它们都要求$\Delta=\Omega$为凸集．但前者还要求T单值连续且$T(\Delta)$在Δ的某紧子集中；后者还要求T为K映象（即T为闭的，且对任一$x\in\Delta$，$T(x)$为不空紧凸集）且Δ为紧的．

本文研究当"Δ为紧集"、"$\Delta=\Omega$"等条件不保证时，K映象的不动点定理．

本文的后一部分，用前一部分所给的不动点定理研究系统（Ⅰ）周期解的存在性问题．

§2 LCS中K映象的不动点定理

下面给出 LCS 中K映象的两个不动点定理。

定理2.1 设1）X为LCS；Δ为X中非空凸集；紧集$M\subset\Delta$；2）$T:\Delta\to M$为K映象．则，T在Δ中有不动点．

证明 1° 取X中θ的绝对凸闭邻域基$\overline{U}$．对任一$U\in\overline{U}$，取有限集$B\subset M$使$M\subset B+U$

记Δ_U为B的凸包，则Δ_U是紧凸集．定义集值映象$T_U:\Delta_U\to\Delta_U$如下

$$T_U(x)=(T(x)+U)\cap\Delta_U \qquad (x\in\Delta_U)$$

则T_U是K映象．由 Glicksberg 不动点定理（〔3〕）得，存在$x_U\in\Delta_U$使$x_U\in T_U(x_U)=(T(x_U)+U)\cap\Delta_U$．于是，存在$z_U\in T(x_U)$，$\xi_U\in U$使得$x_U=z_U+\xi_U$．

2° 在$\overline{U}$中引入半序：$U_1\le U_2\Leftrightarrow U_2\subset U_1$．这时，$\{z_U\}_{(U\in\overline{U})}$为紧集M中的定向点列，故有收敛的定向部分列$z''_\delta\xrightarrow[L]{} z\in M$．现定义$\Omega=\{(U,V)/z_U\in V$，V为$z$的邻域，$U\in\overline{U}\}$，又，在$\Omega$中引入半序：$(U_1,V_1)\le(U_2,V_2)\Leftrightarrow U_2\subset U_1$且$V_2\subset V_1$．则$\Omega$也是一个定向集．

对于任一$(U,V)\in\Omega$，令$z_{(U,V)}=z_U$，$\xi_{(U,V)}=\xi_U$，$x_{(U,V)}=x_U$．这里x_U，z_U，ξ_U等的意义如前．故有$x_{(U,V)}=z_{(U,V)}+\xi_{(U,V)}$．这时还有$z_{(U,V)}\xrightarrow[\Omega]{} z$，$\xi_{(U,V)}\xrightarrow[\Omega]{}\theta$；

* 1983年5月3日收到．

故得$x_{(U,V)} \xrightarrow[\Omega]{} z$. 另一方面又由于$z_{(U,V)} \in T[x_{(U,V)}]$且$T$为闭映象. 则得$z \in T(z)$; 即, z为T的不动点. 定理证毕.

定理2.1 推广了 Glicksberg 不动点定理. 前者条件中Δ若取紧凸集则得后者(取$M=\Delta$).

直接由定理2.1 即得下述推论2.1.1 及2.1.2. 它们分别推广了〔1〕中的定理4.5.1 及9.2.3.

推论2.1.1 设1)X为LCS;Δ为X中的非空凸集;紧集$M \subset \Delta$;2)$T: \Delta \to M$ 是单值闭映象. 则T在Δ中有不动点.

推论2.1.2 设1)X为线性赋范空间;2)Δ为X中的非空凸集;紧集$M \subset \Delta$;3)$T: \Delta \to M$是K映象. 则, T在Δ中有不动点.

定理2.2 设1)X为LCS;Δ为X中的以$\partial\Delta$为边界的闭凸集;M为X中紧集;2)$T: \Delta \to M$为K映象. 如果对于任意的$x \in \partial\Delta$, 恒有$T(x) \subset \Delta$. 则, T在Δ中有不动点.

证明 1°如果Δ的内核$\Delta^\circ = \phi$, 则$\Delta = \partial\Delta$,这时, 由定理2.1 得, T有不动点.

2° 现设$\Delta^\circ \neq \phi$. 不妨设$\theta \in \Delta^\circ$. 这时, 记p: $X \to R^+$为Δ的 Minkowski 泛函. 定义Q: $X \to \Delta$ 如下: 对于任一$x \in X$, 相应于$x \in \Delta$或$x \bar{\in} \Delta$, 令$Q(x)$分别等于x或$p(x)^{-1}x$.

则上述映象Q是连续的. 且对于任意的$x \bar{\in} \Delta$, 恒有$Q(x) \in \partial\Delta$.

3°取含M及Δ的凸集Ω. 定义T_1: $\Omega \to M$如下: 对于任一$x \in \Omega$, 令$T_1(x) = T(Q(x))$.

则T_1也是个K映象, 由定理2.1得, 有$z \in \Omega$, 使得$z \in T_1(z) = T(Q(z))$.

若设$z \bar{\in} \Delta$, 则有$Q(z) \in \partial\Delta$, 故$z \in T(Q(z)) \subset \Delta$, 这与所设矛盾.

故必定$z \in \Delta$. 于是, $z \in T(Q(z)) = T(z)$. 即z为T的不动点. 定理证毕.

本定理的下述推论 2.2.1, 推广了〔1〕中的定理 9.2.4 .

推论2.2.1 设1)X为线性赋范空间;Δ为X中闭凸集;M为X中的紧集;2)T: $\Delta \to M$是K映象;3)对于任意的$x \in \partial\Delta$, 恒有$T(x) \subset \Delta$. 则, T在Δ中有不动点.

§ 3 系统(I)的周期解的存在性

现在, 用§2所给出的不动点定理, 来研究系统(I)的周期解的存在性问题.

设$f(t,s)$在$[0,\infty) \times U$上连续. 这里U表R中某点a的闭邻域. 又设

(A): 存在$r_0, r, L > 0$, 使得$\Delta_1 = [(a-r_0)-r, (a+r_0)+r] \subset U$. 且有

$$|f(t,s)| \leqslant L^{-1}r \quad (s \in \Delta_1, t \in [0,L])$$

(B): 存在$r_c, r_d > 0$, 使得$[c-r_c, c+r_c] \cup [d-r_d, d+r_d] \subset U$, 且对于任一$t \in [0, L]$有

$$0 \leq f(t,s) \leq m_c \quad (|s-c| \leq r_c)$$

$$m_d \leq f(t,s) \leq 0 \quad (|s-d| \leq r_d).$$

这里, $c = a - r_0$; $d = a + r_0$; $m_c = \min\{L^{-1}r_c, 2L^{-1}r_0\}$; $m_d = \max\{-L^{-1}r_d, -2L^{-1}r_0\}$. 记$\Delta = [c,d]$; $\Omega = [c-r_c, c+r_c] \cup \Delta_1 \cup [d-r_d, d+r_d]$.

我们建立以下的定理

定理3.1 设1)$f(t,s)$连续且满足前面的条件(A)、(B);2)对任一$a \in [0,1]$有

$$f(t, as_1 + (1-a)s_2) = af(t,s_1) + (1-a)f(t,s_2)^{[注]} \quad (s_1, s_2 \in \Omega, t \in [0,L])$$

〔注〕这说明, 作为s的函数, $f(t,s)$是仿射的.

则，存在$u^*\epsilon\Delta$及$x_0^*\epsilon C[0,L]$，使得：（i）$x_0^*(t)$在$[0,L]$上满足系统（I）；（ii）$x_0^*(0)=x_0^*(L)=u^*$；（iii）对任意的$t\epsilon[0,L]$，恒有$|x_0^*(t)-u^*|\le\max\{r,r_d,r_c\}$．

证明　（一）取$X=C[0,L]$．对任一$u\epsilon\Delta$，当u分别满足$\epsilon(c,d)$或$=d$或$=c$时，令r_u相应等于r或r_d或r_c．考虑$B(u)=\{x\epsilon X/\max\limits_{0\le t\le L}|x(t)-u|\le r_u\}$，则$B(u)$为不空闭凸集．

又定义连续映象T_u：$B(u)\to B(u)$如下：对于任意的$x\epsilon B(u)$，令

$$T_u(x)(t)=\int_0^t f(s,x(s))ds+u\qquad(t\epsilon[0,L])$$

易见$\overline{T_u(B(u))}$是紧的．由 Schauder 不动点定理，$F(u)=\{x\epsilon B(u)/x=T_u(x)\}\ne\phi$．

（二）定义集值映象K：$\Delta\to\Omega$如下：对于任一$u\epsilon\Delta$，令$K(u)=\{\bar u\epsilon R/\bar u=x(L),x\epsilon F(u)\}$．

则此K是一个K映象，且$K(c)$、$K(d)\subset\Delta$．故由定理2.2得，有$u^*\epsilon\Delta$使得$u^*\epsilon K(u^*)$，所以，有$x_0^*\epsilon F(u^*)$使得$u^*=x_0^*(L)$．由于此$x_0^*(t)$在$[0,L]$上满足$x_0^*(0)=u^*$，故本定理的前两个结论得证．

最后，由$B(u^*)$定义中r_{u^*}的取法，定理的结论（iii）也得证．定理证毕．

下面给出系统（I）在$[0,\infty)$上存在以L为周期的解的条件．

定理3.2　设 1）定理 3.1 的条件满足；2）对于任意的$t\epsilon[0,\infty)$及$s\epsilon\Omega$，恒有$f(t,s)=f(t+L,s)$．则，系统（I）在$[0,\infty)$上有以L为周期的解．

证明　由定理 3.1，存在$[0,L]$上的函数$x_0^*(t)$，满足系统（I）且使得$x_0^*(0)=x_0^*(L)$．

这时，可延拓$x_0^*(t)$，使之满足本定理结论的要求．定理证毕．

参　考　文　献

〔1〕D. R. Smart, Fixed Point Theorem, Cambridge Univ. Press, New York/London, 1980 (First paperback edition).

〔2〕L. R. Williams and W. Leggett, J. Math. Anal. Appl. 69 (1979), 180—193.

〔3〕I. L. Glicksberg, Proc. Amer Math. Soc., 3 (1952), 170—174.