

集合论与代数的新的运算 (I)*

杨安洲

(北京工业大学)

定义 1 令 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, n 是自然数; $P(X) = \{A: A \subseteq X\}$; 对于任意给定的 $A, B \in P(X)$, $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $B = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}\}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq n$, 当 $A \cap B = \emptyset$ 时令 $\varphi(A, B) = A$, 当 $A \cap B \neq \emptyset$ 时, $\min\{\beta: x_\beta \in A \cap B\} = i_{a+1}$ 时令 $\varphi(A, B) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_a}, x_{i_a+2}, x_{i_a+3}, \dots, x_{i_k}\}$; 然后令 $A * B = \varphi(A, B) \cup \varphi(B, A)$, 即先用 φ , 然后用“并运算”。

定理 1 $\langle P(X), * \rangle$ 是循环群 (有限的), 在运算 $*$ 下由 X 出发可生成 $P(X)$ 。

定义 1' 令 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, n 是自然数; $P(X) = \{A: A \subseteq X\}$; 对任 $A \in P(X)$ 先作一一对应 $A \longleftrightarrow (i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n)$, $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0, 1\}$, 满足 $(\forall 1 \leq k \leq n)(x_k \in A \Leftrightarrow i_k = 1) \& (\forall 1 \leq k \leq n)(x_k \notin A \Leftrightarrow i_k = 0)$, 然后把 A 与 A 所对应的 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 作恒同的理解; 对于 $A = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, $B = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in P(X)$, 当 $\{l: i_l = j_l = 1\} \neq \emptyset$, $\min\{l: i_l = j_l = 1\} = l_0$ 时令 $\varphi(A, B) = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in P(X)$, 只有 $k_{l_0} = 0$, 余下的 k_a 均与 A 中的 i_a 相同, 而当 $A \cap B = \emptyset$ 时令 $\varphi(A, B) = A$; 然后再令 $A * B = \varphi(A, B) \cup \varphi(B, A)$ 。

定理 1' 按定义 1', $P(X) = \{(i_1, i_2, \dots, i_n): i_a = 0 \text{ 或 } i_a = 1, 1 \leq a \leq n\}$ 则有 $\langle P(X), * \rangle$ 是循环群, 在运算 $*$ 下由 $X = (1, 1, \dots, 1)$ 出发可生成 $P(X)$ 。

定义 2 令 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, n 是自然数; 按上面的有关的规定, $P(X) = \{A: A \subseteq X\} = \{(i_1, i_2, \dots, i_n): i_a = 0 \text{ 或 } 1\}$; 对于 $A = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, $B = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in P(X)$ 令 $\varphi(A, B) = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in P(X)$, 其中当 $\{l: i_l = j_l = 0\} \neq \emptyset$, $\min\{l: i_l = j_l = 0\} = l_0$ 时取 $k_{l_0} = 1$, 其余所有的 k_a 均与 A 中的 i_a 相同; 然后再令 $A * B = \varphi(A, B) \cap \varphi(B, A)$, 即先用 φ , 然后用“交运算”。

定理 2 按定义 2 中的规定, 则 $\langle P(X), * \rangle$ 是循环群, 在运算 $*$ 下由 $\emptyset$ 出发可生成 $P(X)$ 。

注 1) 定义 1' 是同构原理的应用。2) 定义 2 是对偶原理的应用 (均对定义 1 而言的)。

* 1986年6月14日收到。