

推广的Volterra方程的极限环问题*

曹贤通

陈兰荪

(郑州纺织机电专科学校) (中国科学院数学研究所)

在生物数学中, 基本研究对象之一是系统

$$\dot{x} = a(x)x - bxy, \quad \dot{y} = -cy + dxy, \quad (1)$$

其中, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $a(x)$ 为 x 的至少二阶可微函数.

系统 (1) 是描述捕食者——食饵相互作用的一种近似数学模型, 是对 Lotka—Volterra 数学模型^[1] 的推广. 这里, x 是指食饵种群的密度, y 是指捕食者种群的密度, 函数 $a(x)$ 则描述了食饵种群在脱离捕食者情况下的增殖过程.

文^[2] 分析了当 $a(x) = \frac{ax}{N+x} \cdot \frac{K-x}{K}$ 时, 在各种参数条件下系统的可能有的各种发展过程, 本文则准备用微分方程的定性方法对系统 (1) 的一般情况作一个初步的分析.

不妨可设 $b = 1$, 否则只要作代换 $y = \frac{1}{b}y$ 即可. 于是, 得到

$$\dot{x} = a(x)x - xy = x[a(x) - y] \equiv P(x, y), \quad \dot{y} = -cy + dxy = dy(x - m) \equiv Q(x, y), \quad (2)$$

这里 $m = \frac{c}{d}$.

方程 (2) 有奇点: $O(0, 0)$, $R(x_0, y_0)$, $R_i(x_i, 0)$. 其中, $x_0 = m$, $y_0 = a(m)$, x_i 则为方程 $a(x) = 0$ 的根.

定理 1 当 $a(x)$ 为非增 (或非减) 时, 方程 (2) 在全平面无极限环.

证明 取 Dulac 函数 $\mu(x, y) = x^{-1}y^{-1}$, 则有 $\frac{\partial}{\partial x}(\mu P) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu Q) = \frac{a'(x)}{y}$ 在上 (下) 半平面为定号, 而 $y = 0$ 为方程的积分直线, 所以在全平面无极限环.

注 1: 由于 $x = 0$, $y = 0$ 均为积分直线, 而 $x = x_i$ 为无切直线, 所以只要当 $a'(x)$ 在 m 所在的 $(0, x_1)$ 或 (x_i, x_{i+1}) 上定号, 就可以有全平面无极限环的结论.

注 2: 由证明过程可知, 当 $a(m) > 0$ 时, 若 $a'(m) > 0$, 则 R 点为不稳定的; 若 $a'(m) < 0$, 则 R 点为稳定的.

基于生态学上的原因, 以下仅考虑 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 时的情形, 并且不妨认为 $a(0) = 0$, $a(x_1) = 0$, 当 $x \in (0, x_1)$ 时 $a(x) > 0$. 在生态学上, x_1 就相当于环境对食饵种群的容纳量, 即在没有捕食者情况下, 食饵种群可能达到的最大平衡密度.

定理 2 设 $a(0) = 0$, $a(x_1) = 0$, 当 $x \in (0, x_1)$ 时, $a(x) > 0$. 如果 $x_1 > m > 0$, 且 $a'(m) > 0$, 则 R 点外围至少存在一个稳定的极限环.

证明 可以构造一个区域, 该区域由直线 $x = 0$, $y = 0$, $x = x_1$, $y = y_1$ 及曲线 l 构成 (图 1). 其中 $x = 0$, $y = 0$ 为积分直线; $x = x_1$, $y = y_1$ 为无切直线. 曲线 l 为方程

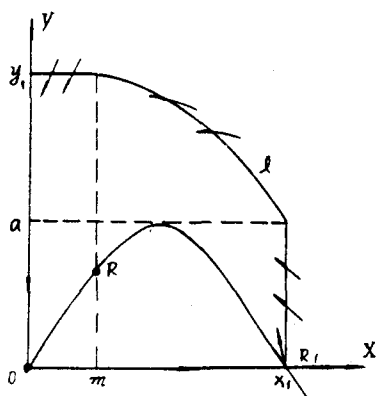


图 1

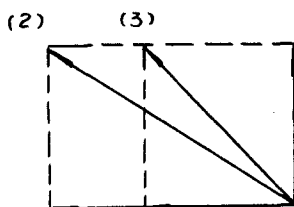


图 2

$$\dot{x} = x(a - y), \quad \dot{y} = dy(x - m) \quad (3)$$

的过初始点 (x_1, a) 的轨线上的一段. 其中, $a = \max_{x \in [0, x_1]} a(x)$. 轨线与直线 $x = m$ 交于点 (m, y_1) . 比较方程 (2) 和 (3) (方程 (3) 即为具中心的 Lotka—Volterra 方程) 可知, 这时 $\dot{y}|_{(2)} = \dot{y}|_{(3)} > 0$, $\dot{x}|_{(2)} < \dot{x}|_{(3)} < 0$. 曲线 l 为方程 (2) 的无切曲线, 且 (2) 的轨线往里穿过 l (图 2).

下面分析奇点 O 和奇点 R 的情形. 奇点 O 为高次奇点. $G(\theta) = -md\sin\theta\cos\theta$ [3]. 所以在第一象限只有两个奇异方向: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. 对 $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 方向, 可将原方程化为极坐标:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{\cos^2\theta[a(r\cos\theta) - r\sin\theta] + d\sin^2\theta(r\cos\theta - m)}{\cos\theta\sin\theta[d(r\cos\theta - m) - a(r\cos\theta) + r\sin\theta]}.$$

显然, 选择充分小的 r , 由 $a(0) = 0$, 完全可以使 $a(r\cos\theta)$ 也足够小, 于是在角域 $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \theta < \frac{\pi}{2}$ 中就有

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{-dmsin^2\theta + a(r\cos\theta) \cdot \cos^2\theta + O(r)}{\cos\theta\sin\theta[-dm - a(r\cos\theta) + O(r)]} > 0.$$

所以在 $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 方向只能有一条轨线进入 O 点, 即 y 轴. 在 $\theta_1 = 0$ 方向, 可以先考虑 $a'(0) \neq 0$ 的情形. 这时, 总能找到一个角域 $0 < \theta < \varepsilon$ (只要 $\tan\varepsilon < a'(0)$ 即可) 使 $a(x) - y > 0$, $\dot{x} = x(a(x) - y) > 0$ 成立. 所以这时在 $\theta_1 = 0$ 方向没有轨线进入 O 点. 再考虑 $a^{(i)}(0) = 0$ 的情形 ($i = 1, 2, \dots, k$). 这时, $a(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + \dots$ 其中 $a_{k+1} > 0$. 由上分析可知, 若有轨线沿 $\theta_1 = 0$ 方向进入 O 点, 则此轨线必位于曲线 $y = a(x)$ 的上方 (否则就有 $\dot{x} > 0$). 不妨设此轨线的局部方程为 $y = b_{k+1}x^{k+1} + b_{k+2}x^{k+2} + \dots$ 其中 $b_{k+1} > a_{k+1} > 0$. 在这轨线上, 应有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-dmb_{k+1}x^{k+1} + O(x^{k+2})}{x(a_{k+1} - b_{k+1})x^{k+1} + O(x^{k+3})} = \frac{-dmb_{k+1} + O(x)}{-(b_{k+1} - a_{k+1})x + O(x^2)}.$$

这时, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$, 显然与原假设沿 $\theta_1 = 0$ 方向进入 O 点矛盾 ($\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$). 所以

在 $\theta_1 = 0$ 方向没有轨线进入 O 点. 而当 $b_{k+1} = a_{k+1}$, $b_{k+2} = a_{k+2}$, $\dots$, $b_{k+h} = a_{k+h}$, $b_{k+h+1} > a_{k+h+1}$

时的情形则可以完全类似讨论. 对奇点R, 可以说明在所述区域内除x轴外没有其它轨线跑向R. 因为在R附近的所述邻域内除x轴外, 总有 $y > 0$, $x - m > 0$, $\dot{y} = dy(x - m) > 0$, 也即轨线都是向上离开R方向的, 不可能进入R点. 实际上, 对于奇点R, 可以先考虑 $a(x) = 0$ 只有单根的情况, 分别为 $0 < x_1 < x_2 < \dots$ 可以算出, 这时 $R_1, R_3, \dots$ 为鞍点, $R_2, R_4, \dots$ 为不稳定的结点, 从 R_1 出发, 仅有一条分界线进入区域; 而当 x_1 为重根时, 则 R_1 应为高次奇点, 由解对参数的连续依赖性可知其构成应是若干个鞍点和不稳定结点重合所组成(相当于 $a'(x_1) \rightarrow 0$, $a''(x_1) \rightarrow 0$, $\dots$ 的逐步实现)即除x轴外轨线只能从 R_1 出发进入区域, 而没有其它轨线从区域跑向 R_1 点. 而当 $a'(m) > 0$, R点为不稳定的, 于是就一起构成了一个广义的Poincaré—Bendixson环域, 由环域定理可知, 这时在R点附近至少存在一个稳定的极限环.

注3: 文^[2]仅仅指出了这时极限环的存在, 但对其存在性却并未给以数学上的严格证明, 而文^[4]中构造区域的方法在这儿也不适用(条件(iii)(iv)未被满足).

为了进一步讨论极限环的唯一性, 将坐标原点移到R. 作变换 $\bar{x} = x - m$, $\bar{y} = y - y_0$. 则 $\dot{\bar{x}} = (\bar{x} + m)[a(\bar{x} + m) - (\bar{y} + y_0)] = f(\bar{x}) - \bar{y}(\bar{x} + m)$, $\dot{\bar{y}} = d\bar{x}(\bar{y} + y_0)$,

其中, $f(\bar{x}) = (\bar{x} + m)[a(\bar{x} + m) - y_0]$. 再作变换 $\bar{x} = m(e^{\frac{u}{m}} - 1)$, $\bar{y} = y_0(e^{\frac{v}{y_0}} - 1)$, 则

$$\dot{u} = \dot{f}(u)e^{-\frac{u}{m}} - y_0(e^{\frac{v}{y_0}} - 1)m, \quad \dot{v} = dmy_0(e^{\frac{u}{m}} - 1),$$

其中 $\bar{f}(u) = f(\bar{x})$ 或

$$\dot{u} = -\varphi(v) - F(u), \quad \dot{v} = g(u), \quad (4)$$

其中, $\varphi(v) = my_0(e^{\frac{v}{y_0}} - 1)$, $g(u) = dmy_0(e^{\frac{u}{m}} - 1)$,

$F(u) = -\bar{f}(u)e^{-\frac{u}{m}} = -m[a(me^{\frac{u}{m}}) - y_0]$. 因为 $ug(u)dmy_0u(e^{\frac{u}{m}} - 1) > 0$ (当 $u \neq 0$ 时);

$G(\pm\infty) = \infty$ [$G(u) = \int_0^u g(u)du = dmy_0(\frac{1}{m}e^{\frac{u}{m}} - u - \frac{1}{m})$]. $\varphi(0) = 0$; $\varphi'_v = me^{\frac{v}{y_0}} > 0$;

$\varphi(+\infty) = +\infty$; $\varphi(-\infty) = -my_0$. $F(0) = 0$; $f(u) = F'(u) = -me^{\frac{u}{m}}a'(me^{\frac{u}{m}})$. 而

$$\left[\frac{f(u)}{g(u)} \right]'_u = \frac{e^{\frac{u}{m}}}{dm^2y_0(e^{\frac{u}{m}} - 1)^2} [ma'(me^{\frac{u}{m}}) + me^{\frac{u}{m}}a''(me^{\frac{u}{m}})(m - me^{\frac{u}{m}})] \geq 0$$

当 $ma'(x) + xa''(x)(m - x) \geq 0$ 时成立. 由^[5]的唯一性定理, 可得:

定理3: 当 $xa''(x)(m - x) + ma'(x) > 0$ 且 $a'(m) > 0$ 时, 方程(2)在R点外围存在唯一稳定的极限环.

注4: 当 $a(x)$ 为二次曲线时, 只要 $a'(m) > 0$, 便可得到极限环唯一的结论. 这时, $a(x) = -a_1x^2 + a_2x$ ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $x_1 = \frac{a_2}{a_1}$). 当 $a'(m) = a_2 - 2ma_1 > 0$ 时, $xa''(x)(m - x) + ma'(x) = 2a_1x^2 - 4a_1mx + ma_2$, $\because 2a_1 > 0$, $\Delta = -8a_1(a_2 - 2ma_1) < 0$ $\therefore$ 必有 $xa''(x)(m - x) + ma'(x) > 0$.

如果使 $a(x) = -a_1x^2 + a_2x + a_3$, 则不难得到:

推论: 三次系统

$$\dot{x} = (-a_1x^2 + a_2x + a_3)x - bxy, \quad \dot{y} = -cy + dxy, \quad (5)$$

其中, $a_1, a_2, a_3, b, c, d > 0$. 当 $a_2d - 2a_1c > 0$ 时, 则在 R 点外围存在唯一稳定的极限环.

定理 4: 对充分小的 $a'(m) > 0$, 方程 (2) 在 R 点外围存在唯一稳定的极限环.

证明: 由^[6]中(分支问题的Friedrich方法)定理, 将 $a'(m)$ 看作 λ , 则显然有 $\text{Tr}A(0) = 0$, $\det A(0) = dma(m) > 0$ 和 $\text{Tr}B(0) = m \neq 0$. 其中 $A(\lambda)$ 为 R 点处的导算子, $A(\lambda) = A(0) + \lambda B(\lambda)$. 由定理 2 的存在性, 便可得到本结论.

倘要进一步考虑, 则可进而计算当 $a'(m) = 0$ 时 R 点的焦点量. 得:

$$c_0 = -\frac{1}{8}m^2p[ma'''(m) + 2a''(m)], \text{ 其中 } P = \frac{1}{\sqrt{dma(m)}}.$$

于是有:

定理 5: 当存在 m_0 , 使 $a'(m_0) = 0$, $a''(m_0) < 0$, $m_0a'''(m_0) + 2a''(m_0) > 0$ 时, 则必存在 $\delta > 0$, 当 $m_0 < m < m_0 + \delta$ 时, 方程 (2) 在 R 点外围至少存在两个极限环, 其中里面一个为不稳定环.

参 考 文 献

- [1] Braun M., 微分方程及其应用 (张鸿林译), 人民教育出版社, 1980.
- [2] Базыкин А. Д., Хибник А. И., Биофизика 1981, ТОМ XXVI, No 5, 851—853.
- [3] 秦元勋, 微分方程所定义的积分曲线, 科学出版社, 1959.
- [4] Bulmer M. G., Theoretical population Biology, 9 (1976), No2, 137—150.
- [5] 张芷芬, ДАН СССР, 119(1958), 659—662.
- [6] 张锦炎, 常微分方程几何理论与分支问题, 北京大学出版社, 1981.