1986年7月

数学研究与评论
第六卷 第三期

二阶线性方程边值问题解的变号性质*

陈水莲 邵明锋 蒲富全
（清华大学应用数学系）

一、引 言

我们研究的是边值问题

$$u''+q(x)u=f(x) \tag{1}$$

$$\alpha u(0)+\alpha' u'(0)=0,\quad \beta u(1)+\beta' u'(1)=0 \tag{2}$$

的解在〔0，1〕上的变号次数．其中$q(x)$，$f(x)$．在〔0，1〕上连续，α、α'、β、β'保证（1）．（2）的解存在〔1〕．主要结果是当$q(x)\le\pi^2-d$，$d>0$时．（1）、（2）的解$u(x)$在〔0，1〕上变号的次数最多不超过$f(x)$在〔0，1〕上变号的次数加两次变号，即线性系统因外力引起的响应函数的震荡次数不超过外力振荡次数与固有振荡次数之和．

R.Bellman在〔2〕、〔3〕中讨论过固定边界问题Green函数的非负性质，我们沿用〔2〕的方法对混合边界条件解的变号性质进行了研究．

二、几 个 引 理

在给出主要定理之前，先给出几个引理

引理1 假设

(i) $\omega(x)\in C[0,1]$，$\omega'(x)\in L^2[0,1]$； (3)

(ii) $\omega(0)=\omega(1)=0$； (4)

(iii) $q(x)\le\pi^2-d$，$d>0$， (5)

则泛函

$$Q(\omega)=\int_0^1(\omega'^2-q(x)\omega^2)\mathrm{d}x>0 \tag{6}$$

证 明 Sturm-Liouville问题

$$u''+\lambda u=0,\quad u(0)=u(1)=0 \tag{7}$$

的最小本征值是π^2.（6）中的ω、ω'按（7）的本征函数展开〔4，p.85〕

$$\omega(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\pi x, \tag{8}$$

$$\omega'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}n\pi a_n\cos n\pi x. \tag{9}$$

引用Parsceval定理

*1983年3月1日收到．

$$\int_0^1 \omega^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 . \tag{10}$$

又
$$\int_0^1 \omega'^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \pi^2 , \tag{11}$$

将（10)、(11）代入（6)，由（5）知

$$Q(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (n^2\pi^2 - q(x))\, a_n^2 > 0 . \tag{12}$$

引理证毕

引理 2　混合边值问题（1)、(2）的解$u(x)$是泛函

$$J(u) = \int_0^1 [u'^2 - q(x)u^2 + 2f(x)u]\mathrm{d}x \tag{13}$$

在条件（2）与（5）下的极小函数.

证明　设$v(x)$是任一函数，$v(x)\in C$，$v'(x)\in L^2$,且满足$v(0)=v(1)=0$

$$J(u+v) = J(u) + 2\int_0^1 (u'v' - q(x)uv + f(x)v)\mathrm{d}x + \int_0^1 (v'^2 - q(x)v^2)\mathrm{d}x$$
$$= J(u) + \int_0^1 (v'^2 - q(x)v^2)\mathrm{d}x .$$

这是因为$u(v)$是（1）解，故

$$\int_0^1 (u'v' - q(x)uv + f(x)v)\mathrm{d}x = u'v\,\Big|_0^1 - \int_0^1 v(u'' + q(x)u - f(x))\mathrm{d}x = 0 .$$

根据引理 1 可知　$J(u+v) > J(u)$. 引理 2 得证.

下面引入符号：$\mathrm{NVS}F(x)[a,b]$，它表示$F(x)$在这间〔a,b〕上变号的次数.

引理 3　设$\varphi(x)\in C[0,1]$，$\mathrm{NVS}\varphi(x)[0,1] < +\infty$，且$\varphi(0)\varphi(1) \neq 0$，

(i）当且仅当$\varphi(0)\varphi(1) > 0$，$\mathrm{NVS}\varphi(x)[0,1] = 2k$;

(ii）当且仅当$\varphi(0)\varphi(1) < 0$，$\mathrm{NVS}\varphi(x)[0,1] = 2k+1$，

其中$k = 0,1,2,\cdots$（k为包括零的任意正整数）

证明　不失一般性，设$\varphi(0) > 0$. 又设$x_1 < x_2 < \cdots < x_N$.

为$\varphi(x)$所有的变长点（即$\varphi(x_i) = 0$，$\varphi(x_i - \varepsilon)\varphi(x_i + \varepsilon) < 0$，$i = 1,2,\cdots,N$)(见图 1)

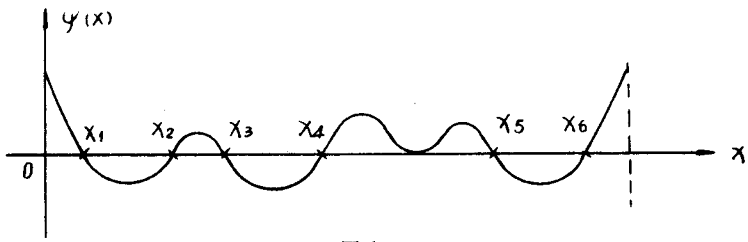


图 1

定义　$x_i < \tilde{x}_i < x_{i+1}$, $i = 1,2,\cdots, N$, $\tilde{x}_i \neq 0$, $\tilde{x}_{N+1} = 1$　(14)

(i）如果$\varphi(\tilde{x}_0) > 0$，$\varphi(\tilde{x}_1) < 0$，$\varphi(\tilde{x}_2) > 0$，$\cdots\varphi(\tilde{x}_{N+1}) > 0$，则$N$必为偶数即$N = N = 2k$. 于是：$\mathrm{NVS}\varphi(x)[0,1] = 2k$. 反之如果$\mathrm{NVS}\varphi(x)[0,1] = 2k$，则必有$\varphi(\tilde{x}_{N+1}) > 0$.

(ii）如果$\varphi(\tilde{x}_{N+1}) < 0$，$\mathrm{NVS}\varphi(x)[0,1] = 2k+1$；反之亦然.

三、主要结果

定理1 设方程（1）中的$f(x)$满足：

（i）$f(\alpha)f(\beta)\neq 0$；（ii）$\text{NVS} f(x)[\alpha,\beta]=0$，其中$[\alpha,\beta]\subset[0,1]$，则（13）中$J(u)$的极小函数$u(x)$有$\text{NVS} u(x)[\alpha,\beta]\leq 2$．具体地说：

（a）当$f(\alpha)u(\alpha)<0$，$f(\beta)u(\beta)<0$，$\text{NVS} u(x)[\alpha,\beta]=0$；

（b）当$f(\alpha)u(\alpha)>0$，$f(\beta)u(\beta)<0$（或$f(\alpha)u(\alpha)<0$，$f(\beta)u(\beta)>0$，$\text{NVS} u(x)[\alpha,\beta]=1$；

（c）当$f(\alpha)u(\alpha)>0$，$f(\beta)u(\beta)>0$，$\text{NVS} u(x)[\alpha,\beta]=0$或2．

证明 只证（a）；(b)；(c) 可类似地证明．

为了确定起见，设$f(x)>0$，$x\in[\alpha,\beta]$．这时，$u(\alpha)<0$，$u(\beta)<0$．假如$u(x)$有变号点，由引理3知它必然至少有两个x_1，x_2；（见图2）那么我们必然可以造出一个新的函数$v(x)$：

$$v(x)=\begin{cases}-u(x), & x\in[x_1,x_2]\\ u(x), & x\bar{\in}(x_1,x_2]\end{cases}$$

则$J(v)=\int_0^1(v'^2-q(x)v^2+2f(x)v(x))\mathrm{d}x<\int_0^1(u'^2-q(x)u^2+2f(x)u(x))\mathrm{d}x=J(u)$．

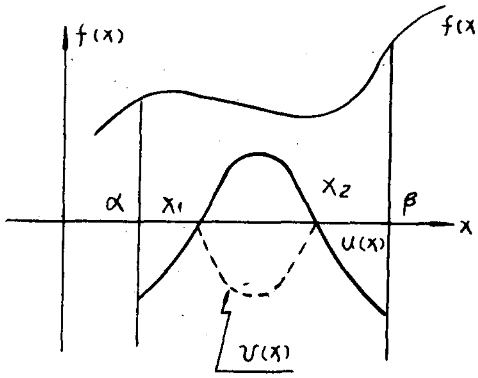


图2

但这与u是$J(u)$的极小函数相矛盾，故有$\text{NVS} u(x)[\alpha,\beta]=0$．

推论1 在定理1的条件下，如果$u(\alpha)=u(\beta)=0$，则$u(x)\neq 0$，并且$u(x)f(x)<0$，$x\in(\alpha,\beta)$．

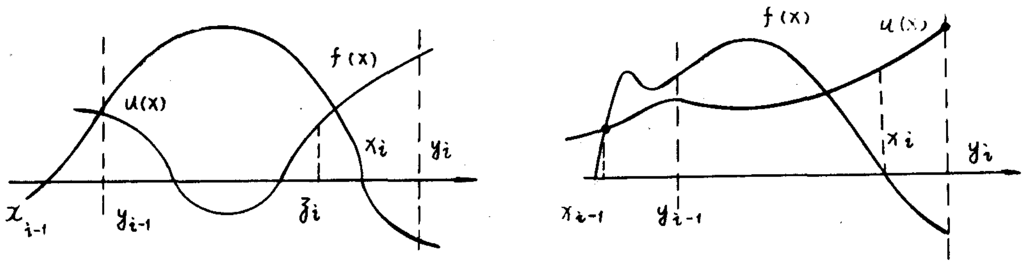
下面引入两个符号y_i，z_i．设$\text{NVS} f(x)[0,1]<+\infty$且$x_i$是$f(x)$的变号点，定义$y_i$，$z_i$如下：如果$x_i$也是$u(x)$的变号点，令$x_{i-1}<z_i<x_i=y_i<x_{i+1}$且$(z_i,x_i)$中没有$u(x)$的变号点：如果$x_i$不是$u(x)$的变号点，令$x_{i-1}<z_i<x_i<y_i<x_{i+1}$且$(z_i,x_i)$，$(x_i,y_i)$中都没有$u(x)$的变号点．由于$u(x)$的连续性，显然这样的$y_i$，$z_i$是存在的．

推论2 （a）当$f(y_{i-1})u(y_{i-1})>0$，$f(y_i)u(y_i)>0$（或$f(y_{i-1})u(y_{i-1})<0$，$f(y_i)u(y_i)<0$），有$\text{NVS} u(x)[y_{i-1},y_i]=\text{NVS} f(x)[y_{i-1},y_i]=1$；

（b）当$f(y_{i-1})u(y_{i-1})>0(<0)$，$f(y_i)u(y_i)<0(>0)$，有$\text{NVS} u(x)[y_{i-1},y_i]=2k$，$k=0,1$．

证明 就（b）证明．不失一般性，设$f(y_{i-1})>0$，由已给条件知$u(y_{i-1})$与$u(y_i)$同号，且都大于0．根据引理3，$\text{NVS} u(x)[y_{i-1},y_i]=2k$，$k$只能取0、1．这是因为如果$\text{NVS} u(y_{i-1},y_i]>2$，即在$u(y_i)\neq 0$时，$\text{NVS} u[y_{i-1},z_i]>2$．而$[y_{i-1},z_i]$为$f(x)$的同号区间，由定理1这是不可能的．对$u(y_i)=0$的情况．也可证明．所以$\text{NVS} u(x)[y_{i-1},y_i]=2k$，$k=0,1$．其余情况都可类似地证明．

推论3 （a）当$f(y_{i-1})u(y_{i-1})>0$，$f(y_i)u(y_i)<0$，$f(y_{i+1})u(y_{i+1})>$，（或$f(y_{i-1})u(y_{i-1})<0$，$f(y_i)u(y_i)>0$，$f(y_{i+1})u(y_{i+1})<0$）有$\text{NVS} u(x)[y_{i-1},y_{i+1}]=2k$，$k=0,1$，即$\max(\text{NVS} u(x)[y_{i-1},y_{i+1}])=2$；



（b）NVS $u(x)[y_{i-1}, y_i] = 2$　　（ ）NVS $u(x)[y_{i-1}, y_i] = 0$

图 3

（b）设y_i, y_j, y_l不相邻，且$y_i<y_j<y_l$. 若$f(y_i)u(y_i)>0$, $f(y_j)u(y_j)<0$, $f(y_l)u(y_l)>0$（或$f(y_i)u(y_i)<0, f(y_j)u(y_j)>0$, $f(y_l)u(y_l)<0$），而在$y_i\le y\le y_{j-1}$的y点处$f(y)u(y)>0$（<0），在$y_j\le y\le y_{l-1}$的y点处$f(y)u(y)<0$（>0），则有NVS NVS $u(x)[y_{j-1}, y_j]$ + NVS $u(x)[y_{l-1}, y_l] = 2k$, $k=0$ 1.

推论 4　（a）当$f(0)u(0)>0$, $f(y_N)u(y_N)>0$（或$f(0)u(0)<0$, $f(y_N)u(y_N)<0$）时，有NVS $u(x)[0, y_N]\le$ NVS $f[0, y_N]=N$;

（b）当$f(0)u(0)>0$, $f(y_N)u(y_N)<0$时，有NVS $u(x)[0, y_N]\le$ NVS $f[0, y_N]+1=N+1$;

（c）当$f(0)u(0)<0$, $f(y_N)u(y_N)>0$时，有NVS $u(x)[0, y_N]\le$ NVS $f[0, y_N]-1=N-1$.

证明　（a）已知$f(0)u(0)>0$, $f(y_N)u(y_N)>0$. 设在$[0, y_N]$之间有y_K: $f(y_K)u(y_K)$开始<0. 但由于$f(y_N)u(y_N)>0$,故一定有某y_L（$y_K<y_L\le y_N$），$f(y_L)u(y_L)>0$. 在其余的y_i处：当$0\le y_i\le y_{k-1}$时，$f(y_i)u(y_i)>0$；当$y_K\le y_i\le y_{L-1}$时，$f(y_i)u(y_i)<0$；当$y_L\le y_i\le y_N$时$f(y_i)u(y_i)>0$.

由推论3（b）有

$$\mathrm{NVS}\,u(x)[y_{K-1}, y_K]+\mathrm{NVS}\,u(x)[y_{L-1}, y_L]\le 2.$$

又根据推论2，有

$$\mathrm{NVS}\,u(x)[0, y_{K-1}]=\sum_{i=1}^{k-1}\mathrm{NVS}\,u[y_{i-1}, y_i]=\sum_{i=1}^{k-1}\mathrm{NVS}\,f(x)[y_{i-1}, y_i]=\mathrm{NVS}\,f(x)[0, y_{K-1}]=K-1.$$

同理，NVS $u(x)[y_K, y_{L-1}]$ = NVS $f(x)[y_K, y_{L-1}]=L-1-k$,

$$\mathrm{NVS}\,u(x)[y_L, y_N]=\mathrm{NVS}\,f(x)[y_L, y_N]=N-L.$$

于是有

$$\mathrm{NVS}\,u(x)[0, y_N]=\mathrm{NVS}\,u(x)[0, y_{K-1}]+\mathrm{NVS}\,u(x)[y_K, y_{L-1}]+\mathrm{NVS}\,u(x)[y_L, y_N]+\mathrm{NVS}\,u(x)[y_{K-1}, y_K]+\mathrm{NVS}\,u(x)[y_{L-1}, y_L]\le(K-1)+(L-1-K)+(N-L)+2=N=\mathrm{NVS}\,f(x)[0, y_N].$$

这证明了（a）. 对于$f(0)u(0)<0$, $f(y_N)u(y_N)<0$的情况，可以同样证明. 如果$f(x)u(x)$在y_i的多处出现变号情况，重复上述讨论过程，即可得出同样的结论.

（b）$f(0)u(0)>0$. 设有某y_M, $f(y_M)u(y_M)$开始<0. 根据推论2（b），就有NVS $u(x)[y_{M-1}, y_M]=2k$, $k=0,1$. 在$0\le y_i\le y_{M-1}$处，$f(y_i)u(y_i)>0$，所以

$$\mathrm{NVS}\,u(x)[0, y_{M-1}]=\mathrm{NVS}\,f(x)[0, y_{M-1}]=M-1.$$

而在〔y_M, y_N〕上，由于$f(y_M)u(y_M)<0$，$f(y_N)u(y_N)<0$，即为（a）的情况，所以有NVS$u(x)$〔y_M, y_N〕$\leq N-M$，就有NVS$u(x)$〔$0, y_N$〕$\leq M-1+2k+N-M=N-1+2k$，$k=0,1$，即

$$\text{NVS}\,u(x)〔0,y_N〕\leq N+1=\text{NVS}\,f(x)〔0,y_N〕+1.$$

这就证明了（b）.（c）的证明与（b）类似.

下面考虑在〔y_N, 1〕上$u(x)$的变号情况，根据x_N及y_N的含义，NVS$f(x)$〔y_N, 1〕$=0$. 由定理1，有

（a）如果$f(y_N)u(y_N)<0$，$f(1)u(1)<0$，则NVS$u(x)$〔y_N, 1〕$=0$；

（b）如果$f(y_N)u(y_N)>0$，$f(1)u(1)<0$，则NVS$u(x)$〔y_N, 1〕$=1$（或：$f(y_N)u(y_N)<0$，$f(1)u(1)>0$）；

（c）如果$f(y_N)u(y_N)>0$，$f(1)u(1)>0$，则NVS$u(x)$〔y_N, 1〕$=2k$, $k=0,1$.

结合推论4，就有：

1）当$f(0)u(0)>0$，$f(1)u(1)>0$时，有NVS$u(x)$〔0,1〕$\leq$NVS$f(x)$〔0,1〕$+2=N+2$；

2）当$f(0)u(0)>0$，$f(1)u(1)<0$时，有NVS$u(x)$〔0,1〕$\leq$NVS$f(x)$〔0,1〕$+1=N+1$（或：当$f(0)u(0)<0$，$f(1)u(1)>0$）；

3）当$f(0)u(0)<0$, $f(1)u(1)<0$时，有NVS$u(x)$〔0,1〕$\leq$NVS$f(x)$〔0,1〕$=N$.

从上面的讨论，我们得出下面主要定理：

定理2 设（i）$q(x)\leq\pi^2-d$, $d>0$，（ii）NVS$f(x)$〔0,1〕$=N<+\infty$，则（1）、（2）的解$u(x)$有：NVS$u(x)$〔0,1〕$\leq N+2$.

对于一般方程$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})+q(x)u=f(x)$，$\alpha u(a)+\alpha' u'(a)=0$，$\beta u(b)+\beta' u'(b)=0$，可以同样讨论.

定理2表明，在一定条件下，线性系统因外力引起的响应函数的震荡次数不超过外力振荡次数与固有振荡次数之和.

参 考 文 献

〔1〕G.Birkoff and G.C.Rota, Ordinary Differential Equations, John wiley, 1969(2nd edition).

〔2〕R.Bellman, On the nonnegativity of Green's functions, Bull.On.Mat.Ital.12, 1957, p.p.411～413.

〔3〕R.Bellmam, On variation-diminishing properties of Green's functions, Bull.On Mat Ital, 16(1961), pp.164～166.

〔4〕R.Bellman, Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes, Academic Press, New York, 1967.