1986年7月

数学研究与评论
第六卷　第三期

高阶半线性椭园方程Dirichlct问题解的存在性和正则性*

张　鹭　平

（浙江师范大学数学系）

对于 $2m$ 阶半线性椭园型方程

$$Lu=f(x,u,Du,\cdots,D^m u)$$

要求 $f(x,y_1,\cdots,y_k)$ 满足Lipschitz条件，目前尚未有深入的讨论，众所周知，满足Lipschitz 条件的函数是一类范围很广的函数，本文准备就这一条件，给出半线性椭园型方程的广义解的定义，且证明了其解的存在性和正则性。

本文用 Ω 表示 R^n 空间中的有界区域。α,β 表示形如下面的多重指标：

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$　　α_j 为非负整数，$j=1,2,\cdots n$. ∂^α 表示如下的微分算子.

$$\partial^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

其中 $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. 用 $\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}$ 表示如下的范数：

$\|u\|_{W_2^m(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$，其中 $\partial^\alpha u$，$|\alpha|\le m$ 表示 u 的各阶的广义导数。用 $\mathring{W}_2^p(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 空间在 $\|\cdot\|_{W_2^p(\Omega)}$ 下的一个完备化。用 $W_2^{-p}(\Omega)$ 表示 $\mathring{W}_2^p(\Omega)$ 上的线性泛函空间，即 $(\mathring{W}_2^p(\Omega))'$. 用L表示 Ω 上的强椭园算子即

$$L=\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(-1)^{(\alpha)}\partial^\alpha a_{\alpha\beta}\partial^\beta$$

其中 $\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}a_{\alpha,\beta}\xi^\alpha\xi^\beta\ge C_0|\xi|^{2m}$. $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$ $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$. 用（;）。表示 $L^2(\Omega)$ 的内积，$\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ 表示 $L^2(\Omega)$ 空间的范数。用 $D^i u,i=1,2,\cdots,m$ 表示由所有的 u 的 j 次微尚作为分量构成的向量．例如 $D^2u=(\partial_{x_1x_1}u,\partial_{x_2x_2}u,\cdots,\partial_{x_nx_n}u)$.
我们还假设凡满足 $|\alpha|\le m$ 的多重指标 α 共有 k 个.

定理　给出如下的半线性偏微分方程.

$$Lu=f(x,u,Du,\cdots,D^m u) \tag{1}$$

* 1983年5月27日收到.

其中L为$2m$阶的椭园算子，$m>\left[\frac{n}{2}\right]+2$，且其系数是$C^{\infty}(\overline{\Omega})$函数，$L$满足下面的关系式：

$$(L\varphi,\varphi)_0\geq C_0\|\varphi\|^2_{W_2^m(\Omega)}\qquad \forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)\tag{2}$$

其中C_0是某个大于0的常数。对函数$f(x_1y_1,\cdots,y_k)$有

(i) $f(x,y_1,\cdots,y_x)\in C^{\infty}(\overline{\Omega}\times\mathbf{R}^k)$，$x\in\overline{\Omega}$，$(y_1,\cdots,y_k)\in\mathbf{R}^k$，且$f(x,0,\cdots,0)\neq 0$.

(ii) $f(x,y_1,\cdots,y_k)$满足下面的Lipschitz条件：

$$|f(x,y_1',\cdots,y_k')-f(x,y_1'',\cdots,y_k'')|\leq\mu_1|y_1'-y_1''|+\cdots+\mu_k|y_k'-y_k''|,\tag{3}$$

$\forall y_j',y_j''\in\mathbf{R}\qquad 1\leq j\leq k\quad \mu_j\geq 0.$

此外我们还假设$\partial\Omega$为C^{∞}光滑.

则当f的Lipschitz系数相对于C_0充分小时（即$\gamma=\max\limits_{1\leq j\leq k}\{\mu_j\}<\frac{C_0}{\sqrt{k}}$时）存在（1）的Dirichler问题的解$u\in C^{\infty}(\Omega)$.

证明 我们用迭代法解方程(1)，先求u_0. 考虑下面的方程：$Lu=f(x,0,\cdots,0)$由于L的系数是$C^{\infty}(\overline{\Omega})$函数，所以存在某$C_1>0$使$(L\varphi,\varphi)_0\leq C_1\|\varphi\|^2_{W_2^m(\Omega)}$，$\forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$.
再加上已知条件不等式（2）成立和$f(x,0,\cdots 0)\in C^{\infty}(\overline{\Omega})\subset L^2(\Omega)\subset W_2^{-m}(\Omega)$. 我们可以根据Lax-milgram定理知存在唯一$u_0\in\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$使$(u_0,L\varphi)_0=(f(x,0,\cdots,0),\varphi)$.
因$\partial\Omega$为C^{∞}光滑，L的系数属于$C^{\infty}(\overline{\Omega})$，且
$f(x,0,\cdots 0)\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$由〔1〕的第十章的高阶椭园型方程的正则性定理可知$u_0\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$

现在来求u_1，因当x固定时，$f(x_1,y_1,\cdots,y_k)$为$\mathbf{R}^k$上的无穷可微函数，因而对于上面解出的u_0，$f(x,u_0,Du_0,\cdots,D^mu_0)$是$\overline{\Omega}$上的无穷可微函数，因而如上所证方程

$$Lu=f(x,u,Du_0,\cdots,D^mu_0)$$

的解$u_1\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$。重复以上的讨论，将此过程继续下去，一般地若已求出$u_n\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$，则$u_{u+1}$可由

$$Lu_{n+1}=f(x,u_n,Du_n,\cdots,D^mu_n)\quad n=0,1,2,\cdots\tag{4}$$

求出，将前后相邻两式相减即得：

$$L(u_{n+1}-u_n)=f(x,u_n,\cdots,D^mu_n)-f(x,u_{n-1},\cdots,D^mu_{n-1})$$

于是：

$$u_{n+1}-u_n=L^{-1}[f(x,u_n,\cdots,D^mu_n)-f(x,u_{n-1},\cdots,D^mu_{n-1})]$$

两边取$W_2^m(\Omega)$范数得：

$$\|u_{n+1}-u_n\|_{W_2^m(\Omega)}=\|L^{-1}[f(x,u_n,\cdots,D^mu_n)-f(x,u_{n-1},\cdots,D^mu_{n-1})]\|_{W_2^m(\Omega)}$$

$$\leq\|L^{-1}\|\,\|f(x,u_n,\cdots,D^mu_n)-f(x,u_{n-1},\cdots,D^mu_{n-1})\|_{W_2^{-m}(\Omega)}\tag{5}$$

由Lax的负范数不等式，即对$g\in L^2(\Omega)$有

$\|g\|_{W_2^{-m}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$ 所以由（5）式

$$\|u_{n+1}+u_n\|_{W_2^m(\Omega)} \leq \|L^{-1}\|\cdot\|f(x,u_n,\cdots,D^m u_n)-f(x,u_{n-1},\cdots,D^m u_{n-1})\|_{L^2(\Omega)}.$$

由 Lipschitz 条件

$$\|f(x,u_n,Du_n,\cdots,D^m u_n)-f(x,u_{n-1},Du_{n-1},\cdots,D^m u_{n-1})\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq\left[\int_\Omega\left(\sum_{|a|\leq m} r^2|D^a(u_n-u_{n-1})|\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\gamma\sqrt{k}\left[\int_\Omega\sum_{|a|\leq m}|D^a(u_n-u_{n-1})|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}=\gamma\sqrt{K}\,\|u_n-u_{n-1}\|_{W_2^m(\Omega)},$$

其中k为所有满足$|a|\leq m$的多重指标a的个数。此外由条件（2）可推得，对所有的$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，对算子$L$有下面的不等式

$$\|L\varphi\|_{W_2^{-m}(\Omega)}\geq C_0\|\varphi\|_{W_2^m(\Omega)},$$

所以$\|L^{-1}\|\leq\frac{1}{C_0}$，因而总起来可得

$$\|u_{n+1}-u_n\|_{W_2^m(\Omega)}\leq\frac{\sqrt{k}\,\gamma}{C_0}\|u_n-u_{n-1}\|_{W_2^m(\Omega)}.$$

由已知可得$\rho=\frac{\sqrt{k}\,\gamma}{C_0}<1$，所以$\{u_n\}$为$\mathring{W}_2^m(\Omega)$中的柯希叙列。由$\mathring{W}_2^m(\Omega)$的完备性，知存在唯一的$u\in\mathring{W}_2^m(\Omega)$使

$$\|u_n-u\|_{W_2^m(\Omega)}\to 0\quad 当 n\longrightarrow\infty 时$$

先暂搁下证明，我们来谈一个定义，若函数$g(x,y_1,\cdots,y_k)\in C^0(\overline{\Omega}\times R^k)$，且满足Lipschitz条件（3），我们对任何$v\in\mathring{W}_2^m(\Omega)$，可定义$g(x,v,Dv,\cdots,D^m v)$事实上：因$v\in\mathring{W}_2^m(\Omega)$，就有一列$\{\varphi\}\subset C_0^\infty(\Omega)$，当$n\to\infty$时$\|\varphi_n-v\|_{W_2^m(\Omega)}\longrightarrow 0$。由$g(x,y_1,\cdots,y_k)$对各变元连续，故$\tilde{g}_n(x)=g(x,D\varphi_n,\cdots,D^m\varphi_n)$定义了一个从$C_0^\infty(\Omega)$到$L^2(\Omega)$的映射。由Lipschitiz 条件我们可知

$$\|\tilde{g}_n(x)-\tilde{g}_k(x)\|_{L^2(\Omega)}=\|g(x,\varphi_n,D\varphi_n,\cdots,D^m\varphi_n)$$
$$-g(x,\varphi_k,D\varphi_k,\cdots,D^m\varphi_k)\|_{L^2(\Omega)}\leq\sqrt{k}\,\gamma\|\varphi_n-\varphi_k\|_{W_2^m(\Omega)}$$

由于$\{\varphi_n\}$是$\mathring{W}_2^m(\Omega)$中的柯希叙列，可知$\{\widetilde{g_n(x)}\}$是$L^2(\Omega)$中的柯希叙列，由$L^2(\Omega)$中的完备性，我们可以得$\{\tilde{g}_n(x)\}$在$L^2(\Omega)$中的极限$\tilde{g}(x)\in L^2(\Omega)$。于是对$v\in\mathring{W}_2^m(\Omega)$，我们定义$g(x,v,\cdots,D^m v)=\tilde{g}(x)$。而当$v\in C^m(\Omega)\cap\mathring{W}_2^m(\Omega)$时，由于$g(x,y_1,y_2,\cdots,y_k)\in C^0(\overline{\Omega}\times R^k)$及$L^2(\Omega)$中极限之唯一性，$\tilde{g}(x)$和常义的$g(x,v,\cdots,D^m v)$在$\Omega$上几乎处处相等。

对于本定理证明中的$u\in\mathring{W}_2^m(\Omega)$，如上所说明，也可以定义$f(x,u,Du,\cdots,D^m u)\in L^2(\Omega)$。因而我们可以给出半线性方程$Lu=f(x,u,Du,\cdots,D^m u)$弱解的定义：

定义 对于$u\in\mathring{W}_2^m(\Omega)$，和上面所定义的$f(x, Du, \cdots, D^m u)$有下式成立

$$(u, L\varphi)_0=(f(x,u,\cdots,D^m u),\varphi).\ \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega) \qquad (6)$$

则称u为$Lu=f(x,u,Du,\cdots,D^m u)$的弱解。

对于定理中之u，我们能证明（6）式成立，事实上：由（3）式，如上面所证，很容易证明当u_n按$\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}$趋于$u$时，$\|f(x,u,\cdots,D^m u)-f(x,u_n,\cdots,D^m u_n\|_{L^2(\Omega)}\to 0$．对任何$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，

$$\begin{aligned}&|(u,L^*\varphi)_0-(f(x,u,Du,\cdots,D^m u),\varphi)_0|=|(u_{n+1},L^*\varphi)_0-(f(x,u_n,Du_n,\\&\cdots,D^m u_n),\varphi)_0+(u-u_{n+1},L^*\varphi)_0-(f(x,u,Du,\cdots,D^m u)-f(x,u_n,\\&\cdots,D^m u_n),\varphi)_0|.\end{aligned}$$

由于$u_n\in C^\infty(\overline{\Omega})\cap\mathring{W}_2^m(\Omega)$及（4）式，

上式$\leq|(u-u_{n+1},L^*\varphi)_0|+|(f(x,u,\cdots,D^m u)-f(x,u_n,\cdots,D^m u_n),\varphi)|$

$$\leq\|u-u_{n+1}\|_{W_2^m(\Omega)}\|L^*\varphi\|_{L^2(\Omega)}+\|f(x,u,Du,\cdots,D^m u)-f(x,u_n),\cdots,D^m u_n)\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

上式右边当$n\to\infty$时趋于0．

因为$f(x,u,\cdots,D^m u)\in L^2(\Omega)$，我们对于$w$的线性方程

$$Lw=f(x,u,\cdots,D^m u)$$

的Dirichlet问题可以求出它的弱解$w\in\mathring{W}_2^m(\Omega)$．对任何$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ w满足

$$(w,L^*\varphi)_0=(f(x,u,Du,\cdots,D^m u),\varphi). \qquad (7)$$

由（6）式减去（7）式可得：

$$(u-w,L^*\varphi)_0=0$$

由于L为$\mathring{W}_2^m(\Omega)$到$W_2^{-m}(\Omega)$上的一一对应的同构映射，所以$u-w$为$\mathring{W}_2^m(\Omega)$中的零点，即几乎处处有$u=w$．但因$f\in L^2(\Omega)$，$\partial\Omega$为C^∞光滑，L为具有C^∞系数的椭园算子，由椭园方程的内正则性定理可得$u\in{}^{2m}_{loc}(\Omega)$，因由已知$m>[\frac{n}{2}]+2$，所以$2m>[\frac{n}{2}]+1+(m+1)$，由Sobolev嵌入定理知$u\in C_{loc}^{m+1}(\Omega)$，于是按照常义$f(x,u,Du,\cdots,D^m u)\in C_{loc}^1(\Omega)$．如此反复应用线性椭园方程的内正则性定理，由已知$f(x,y_1,y_2,\cdots,y_x)\in C^\infty(\overline{\Omega}\times R^k)$可得$u\in C^\infty(\Omega)$.

参 考 文 献

〔1〕Schechter. M., Modern Methods in Partial Differential Equations, Mcgraw-hill Internetional Book Compang, 1977.

〔2〕Berger, M. S., Nonlinearity and Functional ANalysis., Academic Press, 1977.