带一类非Carleman正位移的拟线性奇异积分方程

李　好　好
（山东海洋学院）

空气动力学中出现的某些混合型偏微分方程组的边值问题往往归结为带非Carleman位移的奇异积分方程。关于带Carleman位移的线性奇异积分方程已有系统理论．可见专著[1]和文献[2]等．而关于带非Carleman位移的奇异积分方程的理论目前还很不完整．专著[1]介绍了一些结果．

本文研究带位移的拟线性奇异积分方程

$$u(x)=\lambda\left[\int_a^b \frac{k(s,u(s))u(s)}{s-\alpha(x)}ds+g(x)\right],$$

其中$y=\alpha(x)$ 是区间［a, b］到自身的保持方向的同胚变换，即正位移．它满足$\alpha(a)=a$，$\alpha(b)=b$，且对所有$a\leqslant x_1$，$x_2\leqslant b$

$$0<m\leqslant\left|\frac{\alpha(x_2)-\alpha(x_1)}{x_2-x_1}\right|\leqslant M<\infty\ , \tag{2}$$

而$\alpha(x)$ 的反函数$x=\beta(y)$ 满足

$$0<\frac{1}{M}\leqslant\left|\frac{\beta(y_2)-\beta(y_1)}{y_2-y_1}\right|\leqslant\frac{1}{m}<\infty\ . \tag{2'}$$

我们并不要求$\alpha(x)$ 满足条件

$$\alpha_n(x)\equiv x,\ 对所有x\in[a,\ b]\ ;\ \alpha_k(x)\not\equiv x,\ 对所有k=1,2,\cdots,n-1,$$

其中$\alpha_k(x)=\alpha[\alpha_{k-1}(x)]$，$\alpha_0(x)\equiv x$．即$\alpha(x)$ 不必是Carleman位移．

我们先给出有关的函数集合的定义[3]：

定义1　称函数$x(t)\in H_\delta$，如果它在区间［a, b］定义，且对任意的t_1，$t_2\in[a,\ b]$，满足条件

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant C_x|t_1-t_2|^\delta\ , \tag{3}$$

其中C_x为常数，与t_1，t_2无关．$0<\delta\leqslant1$．

在H_δ中引进范数

$$\|x\|_{H_\delta}=\|x\|_{C[a,b]}+\sup_{a\leqslant t_1,t_2\leqslant b}\frac{|x(t_2)-x(t_1)|}{|t_2-t_1|^\delta}\ , \tag{4}$$

不难知H_δ是Banach空间．

定义2　称函数$x(t)\in H_\delta^\circ$，如果$x(t)\in H_\delta$，且$x(a)=x(b)=0$．

在H_δ°中引进与H_δ相同的范数，则H_δ°是H_δ的闭子空间。

定义3　称函数$x(t)\in H_{R,K,\delta}$，如果$x(t)\in H_\delta$，且满足

* 1983年10月31日收到．

$$\| x \|_{C_{[a,\ b]}} \leqslant R\ , \tag{5}$$

$$\sup_{a < t_1,\ t_2 \leqslant b} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\delta}} \leqslant k\ , \tag{6}$$

其中R和K是确定的常数.

由定义不难知$H_{R,K,\delta}$是H_{δ}中的闭、凸、紧和完备集.

为了应用Schauder的不动点原理.我们来对奇异积分给出估计.

引理 1 设函数$\psi(s)$ 在 $[a,\ b]$ 连续, $\psi(a)=\psi(b)=0$, $\int_0^{\frac{a+a}{2}} \frac{\omega(\psi,\ t)}{t}\mathrm{d}t<\infty$, $\omega(\psi,t)$ 是连续模, 那么对奇异积分

$$V(x)=\int_a^b \frac{\psi(s)}{s-a(x)}\mathrm{d}s \tag{7}$$

(其中$a(x)$ 是位移函数, 满足本文开头所说的条件) 成立下列不等式

$$|V(x)| \leqslant 7\int_0^{\frac{a-a}{2}} \frac{\omega(\psi,\ t)}{t}\mathrm{d}t\ , \tag{8}$$

$$\omega(V,\ \delta) \geqslant 44M\delta\int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{\omega(\psi,\ t)}{t(t+M\delta)}\mathrm{d}t. \tag{9}$$

证明 记$G(x)=\min\left\{\frac{a(x)-a}{2},\ \frac{b-a(x)}{2}\right\}$, 先证明 (8) 式:

$$V(x)=\int_a^{\frac{a+a(x)}{2}} \frac{\psi(s)}{s-a(x)}\mathrm{d}s+\int_{\frac{a+a(x)}{2}}^{a(x)-G(x)} \frac{\psi(s)}{s-a(x)}\mathrm{d}s+\int_{a(x)-G(x)}^{a(x)+G(x)} \frac{\psi(s)-\psi(a(x))}{s-a(x)}\mathrm{d}s+$$

$$\int_{a(x)+G(x)}^{\frac{a(x)+b}{2}} \frac{\psi(s)}{s-a(x)}\mathrm{d}s+\int_{\frac{a(x)+b}{2}}^{b} \frac{\psi(s)}{s-a(x)}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{5} I_k\ . \tag{10}$$

下面分别估计$I_k(k=1,2,\cdots,5)$

$$|I_1| \leqslant \frac{2}{a(x)-a}\int_0^{\frac{a(x)-a}{2}} |\psi(a+t)-\psi(a)|\mathrm{d}t < \int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{\omega(\psi,\ t)}{t}\mathrm{d}t.$$

类似估计I_5, 有 $|I_5| \leqslant \int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{\omega(\psi,\ t)}{t}\mathrm{d}t.$

在估计I_2和I_4时, 不妨设$G(x)=\frac{b-a(x)}{2}$. 此时$I_4=0$,

$$|I_2| \leqslant \int_{G(x)}^{\frac{a(x)-a}{2}} \frac{|\psi(a(x)-t)|}{t}\mathrm{d}t < \int_{G(x)}^{\frac{a(x)-a}{2}} \frac{\omega(\psi, b-a(x)+t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant 3\int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{\omega(\psi,\ t)}{t}\mathrm{d}t,$$

$$|I_3| \leqslant \int_{-G(x)}^{G(x)} \left|\frac{\psi(t+a(x))-\psi(a(x))}{t}\right|\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{\omega(\psi,\ t)}{t}\mathrm{d}t.$$

将上面的估计式代入 (10) 即证得 (8) .

为证明 (9) . 我们来估计 $|V(x_2)-V(x_1)|$, 记

$h=|a(x_2)-a(x_1)|$, $G_1=min\left\{\frac{h}{2},\ \frac{a(x_1)-a}{2}\right\}$, $G_2=min\left\{\frac{h}{2},\ \frac{b-a(x_2)}{2}\right\}$, 则

$$V(x_2)-V(x_1)=\int_a^b \frac{h\psi(s)}{[s-a(x_1)][s-a(x_2)]}\mathrm{d}s=h\int_a^{\frac{a+a(x_1)}{2}} \frac{\psi(s)}{[s-a(x_1)][s-a(x_2)]}\mathrm{d}s$$

$$+h\int_{\frac{a+a(x_1)}{2}}^{a(x_1)+G_1} \frac{\psi(s)-\psi(a(x_1))}{[s-a(x_1)][s-a(x_2)]}\mathrm{d}s+h\int_{a(x_1)+G_1}^{a(x_1)+\frac{h}{2}} \frac{\psi(s)}{[s-a(x_1)][s-a(x_2)]}\mathrm{d}s-$$

$$\psi(a(x_1))\ \ln\frac{G_1(a(x_1)-a+2h)}{(a(x_1)-a)(h-G_1)}+h\int_{\frac{b+a(x_2)}{2}}^{b} \frac{\psi(s)}{[s-a(x_1)][s-a(x_2)]}\mathrm{d}s+$$

$$h\int_{a(x_2)-G_2}^{\frac{b+a(x_2)}{2}}\frac{\psi(s)-\psi(a(x_2))}{[s-a(x_1)][s-a(x_2)]}ds+h\int_{a(x_2)-\frac{h}{2}}^{a(x_2)-G_2}\frac{\psi(s)}{[s-a(x_1)][s-a(x_2)]}ds-$$

$$\psi(a(x_2))\ \ln\frac{G_2(b-a(x_2)+2h)}{(b-a(x_2))(h-G_2)}=\sum_{k=1}^{8}J_k.$$

下面分别估计$J_k(k=1,2,\cdots,8)$：

$$|J_1|\leqslant\frac{4h}{[a(x_1)-a][a(x_2)-a]}\int_0^{\frac{a(x_1)-a}{2}}|\psi(a+t)|dt\leqslant 2h\int_0^{\frac{a(x_1)-a}{2}}\frac{\omega(\psi,t)}{t(t+h)}dt;$$

$$|J_2|\leqslant h\int_{\frac{a+a(x_1)}{2}}^{a(x_1)+G_1}\frac{\omega(\psi,\ |a(x_1)-s|)}{|s-a(x_1)|\,|s-a(x_2)|}ds\leqslant h\int_0^{\frac{a(x_1)-a}{2}}\frac{\omega(\psi,t)}{t(t+h)}dt+h\int_0^{G_1}\frac{\omega(\psi,t)}{t(h-t)}dt\leqslant$$

$$4h\int_0^{\frac{a(x_1)-a}{2}}\frac{\omega(\psi,t)}{t(t+h)}dt;$$

再估计J_3，在$h\leqslant a(x_1)-a$时$J_3=0$，$h>a(x_1)-a$时

$$|J_3|\leqslant 2\int_{a(x_1)+G_1}^{a(x_1)+\frac{h}{2}}\frac{|\psi(s)|}{s-a(x_1)}ds=2\int_{G_1}^{\frac{h}{2}}\frac{|\psi[t+a(x_1)]|}{t}dt\leqslant 2\int_{\frac{a(x_1)-a}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\omega(\psi,t+a(x_1)-a)}{t}dt\leqslant$$

$$6\int_{\frac{a(x_1)-a}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\omega(\psi,t)}{t}dt\leqslant 9h\int_{\frac{a(x_1)-a}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\omega(\psi,t)}{t(t+h)}dt;$$

估计J_4：在$G_1=\frac{h}{2}$时，利用$\ln(1+x)\leqslant x\quad(x\geqslant 0)$，得

$$|J_4|\leqslant|\psi(a(x_1))|\frac{2h}{a(x_1)-a}\leqslant 4|\psi(a(x_1))|\frac{h}{a(x_2)-a},$$

在$G_1=\frac{a(x_1)-a}{2}$时类似可得

$$|J_4|\leqslant|\psi(a(x_1))|\frac{2(a(x_1)-a)}{2h-(a(x_1)-a)}\leqslant 2|\psi(a(x_1))|\leqslant 4|\psi(a(x_1))|\frac{h}{a(x_2)-a},$$

从而

$$|J_4|\leqslant 4|\psi(a(x_1))|\frac{h}{a(x_2)-a}\leqslant 4h\frac{\omega(\psi,a(x_1)-a)}{a(x_2)-a}\leqslant 8h\frac{\omega(\psi,\frac{a(x_1)-a}{2})}{a(x_2)-a}\leqslant$$

$$\frac{16h}{a(x_2)-a}\int_0^{\frac{a(x_1)+a}{2}}\frac{\omega(\psi,t)}{t}dt.$$

而从

$$\sum_{k=1}^{4}|J_k|\leqslant 22h\int_0^{\frac{b-a}{2}}\frac{\omega(\psi,t)}{t(t+h)}dt;$$

类似地估计$J_5,\cdots J_8$。于是得到

$$|V(x_2)-V(x_1)|\leqslant 44h\int_0^{\frac{b-a}{2}}\frac{\omega(\psi,t)}{t(t+h)}dt,\ 有\omega(V,\ \delta)\leqslant 44M\delta\int_0^{\frac{b-a}{2}}\frac{\omega(\psi,t)}{t(t+M\delta)}dt.$$

引理1证毕。

现在我们来讨论方程（1）解的存在性。

定理1 若函数$K(s,\ u)$在区域$D=\{a\leqslant s\leqslant b,\ -R\leqslant u\leqslant R\}$中定义，在D内处处满足条件

$$K(a,\ u)=K(b,\ u)=0\ , \tag{12}$$

$$|K(s_1,\ u)-K(s_2,\ u)|\leqslant A|s_1-s_2|^{\beta}, \tag{13}$$

$$|K_u(s,\ u)\ u|\leqslant B; \tag{14}$$

那么在 $|\lambda| \leqslant \min\left\{\frac{K}{K'}, \frac{R}{R'}\right\} = \lambda_0$时，其中

$$K' = \frac{44M^\delta}{\delta(1-\delta)}\left\{AR + [B + A(b-a)^\delta]K\right\} + \tilde{K},$$

$$R' = \frac{7}{\delta}\left(\frac{b-a}{2}\right)^\delta\left\{AR + [B + A(b-a)^\delta]K\right\} + \tilde{R},$$

A、B为常数．$g(x) \in H_{\tilde{R},\tilde{K},\delta}$ 方程（1）在$H_{R,K,\delta}$中至少有一个解．

证明 记$\psi(s) = K(s、u(s))u(s)$，利用引理1，

$\|V\|_C \leqslant \frac{7}{\delta}\left(\frac{b-a}{2}\right)^\delta\left\{AR + [B + A(b-a)^\delta]K\right\}$，$\omega(V, r) \leqslant$

$\frac{44}{\delta(1-\delta)}\left\{AR + [B + A(b-a)^\delta]K\right\}(Mr)^\delta$．

于是，令

$$K' = \frac{44M^\delta}{\delta(1-\delta)}\left\{AR + [B + A(b-a)^\delta]K\right\} + \tilde{K},$$

$$R' = \frac{7}{\delta}\left(\frac{b-a}{2}\right)^\delta\left\{AR + [B + A(b-a)^\delta]K\right\} + \tilde{R},$$

则在 $|\lambda| \leqslant \min\left\{\frac{K}{K'}, \frac{R}{R'}\right\} = \lambda_0$ 时，算子$\lambda Mu = \lambda[V(x) + g(x)]$ 由$H_{R,K,\delta}$作用到$H_{R,K,\delta}$有界连续．注意到$H_{R,K,\delta}$闭、凸、紧，故由Schauder不动点原理，方程（1）在$H_{R,K,\delta}$中至少有一解．定理1证毕．

下面再讨论方程（1）解的唯一性问题．

定理2 若函数$K(s,u)$在区域$D_1 = \{a \leqslant s \leqslant b, -\infty < u < +\infty\}$定义，在$D_1$处处满足

$$K(a, u) = K(b, u) = 0, \tag{12}$$

$$|K(s_1, u_1) - K(s_2, u_2)| \leqslant A_1[|s_1 - s_2|^\delta + |u_1 - u_2|], \tag{15}$$

$$|K_u(s_1, u_1) - K_u(s_2, u_2)| \leqslant A_2[|s_1 - s_2|^\delta + |u_1 - u_2|], \tag{16}$$

其中A_1，A_2是常数，那么若在空间H_δ（$0 < \delta < 1$）中方程（1）对某个入值（不一定很小）有解，则这个解必唯一．

证明 设$u(x)$、$v(x) \in H_\delta$是方程（1）的两个解．那么

$$u(x)) - v(x) = \lambda\int_a^b \frac{K(s, u(s))u(s) - K(s, v(s))v(s)}{s - a(x)}ds, \tag{17}$$

容易得到

$K(s, u(s))u(s) - K(s, v(s))v(s) = [u(s) - v(s)]\int_0^1\{K_u(s, \tau)\tau + K(s, \tau)\}dt =$
$[u(s) - v(s)]\theta(s)$，

其中$\tau = v(s) + t[u(s) - v(s)]$，$\theta(s) = \int_0^1\{K_u(s, \tau)\tau + K(s, \tau)\}d\tau \in H^\circ_\delta$．

而作为$u(x) - v(x)$的带位移的齐次线性奇异积分方程

$$u(x) - v(x) = \lambda\int_a^b \frac{\theta(s)[u(s) - v(s)]}{s - a(x)}ds$$

对任意的λ只有平凡解[1]，故$u(x) \equiv v(x)$．定理2证毕．

现在讨论如何构造方程（1）的逐次逼近解．任取$u_0(x) \in H_{K,\delta}$为初始逼近．作逐次逼近序列

$$u_n(x)=\lambda\left[\int_a^b \frac{K[s,\varphi(u_{n-1}(s))]\ u_n(s)}{s-a(x)}ds+g(x)\right],\tag{18}$$

其中$\varphi(t)=\begin{cases} t, & 当 |t|\leqslant R, \\ R, & 当 |t|>R, \\ -R, & 当 t<-R. \end{cases}$

方程（18）作为带位移的线性奇异积分方程，在H_δ中有唯一解．于是有

定理 3 若函数$K(s, u)$在区域D内处处满足定理1的条件和

$$|K_u(s, u)|\leqslant B' \quad (B'为常数),\tag{19}$$

那么当

$$|\lambda|<\lambda_1=\{C_p[A(b-a)^\delta+B'R\}^{-1}\tag{20}$$

时，逐次逼近序列（18）在$L_p[a,b]$度量意义下收敛于方程（1）的解$u^*(x)\in H_{R,K,\delta}$且有估计

$$\|\Delta_n(x)\|_{L_p}\leqslant a^n\|\Delta_0(x)\|_{L_p},$$

其中$a=\dfrac{|\lambda|C_pB'R}{1-|\lambda|C_pA(b-a)^\delta}$，$\Delta_n(x)=u^*(x)-u_n(x) \quad (n=0,1,2,\cdots)$，

C_p为线性奇异算子在$L_p[a, b]$中的范数．

证明 设$u^*(x)$，$u_0(x)\in H_{R,K,\delta}$，$u^*(x)$为方程（1）的解．那么

$$\Delta_n(x)=\lambda\int_a^b\frac{K(s,u^*(x))\ u^*(x)-K[s,\varphi(u_{n-1}(s))]\ u_n(s)}{s-a(x)}ds=$$

$$=\lambda\int_a^b\frac{K[s,\varphi(u^*(s))]\ u^*(s)-K[s,\varphi(u_{n-1}(s))]\ u_n(s)}{s-a(x)}ds.$$

于是$\|\Delta_n(x)\|_{L_p}\leqslant|\lambda|C_p\|K[x, \varphi(u^*(x))]\ u^*(x)-K[x, \varphi(u_{n-1}(x))]\ u_n(x)\|_{L_p}\leqslant$
$|\lambda|C_p\{\|u^*(x)[\varphi(u^*(x))-\varphi(u_{n-1}(x))]\int_0^1 K_u(x, \tau)\ dt+K[x, \varphi(u_{n-1}(x))]\ \Delta_n(x)\|_{L_p}$，
其中$\tau=\varphi(u_{n-1}(x))+t\left[\varphi(u^*(x))-\varphi(u_{n-1}(x))\right]$．从而有$\|\Delta_n(x)\|_{L_p}\leqslant$
$|\lambda|C_p\{RB'\|\Delta_{n-1}(x)\|_{L_p}+A(b-a)^\delta\|\Delta_n(x)\|_{L_p}$，

因此$\|\Delta_n(x)\|_{L_p}\leqslant\dfrac{|\lambda|C\,RB'\|\Delta_{n-1}(x)\|_{L_p}}{1-^p|\lambda|C_p(b-a)^\delta}=a\|\Delta_{n-1}(x)\|_{L_p}$．

即得$\|\Delta_n(x)\|_{L_p}\leqslant a^n\|\Delta_0(x)\|_{L_p}$．

而在$|\lambda|<\lambda_1$时，$0<a<1$，且$\|\Delta_0(x)\|\leqslant 2R(b-a)^{\frac{1}{p}}$．故此时有$\|\Delta_n(x)\|_{L_p}\to 0 \quad (n\to\infty)$，定理3证毕．

由定理2和定理3，立即得

定理 4 若函数$K(s, u)$在区域D中满足定理2的条件．那么在$|\lambda|<\min\{\lambda_0, \lambda_1\}$时，方程（1）有唯一解$u^*(x)\in H_{R,K,\delta}$．逐次逼近序列（18）在$L_p[a, b]$度量意义下收敛于$u^*(x)$，且成立估计

$$\|\Delta_n(x)\|_{L_p}\leqslant a^n\cdot 2R(b-a)^{\frac{1}{p}}.\tag{21}$$

最后我们讨论方程（1）的解对位移函数的连续依赖性．我们有

定理 5 若函数$K(s, u)$和参数λ满足定理4的条件，那么方程（1）的解连续依赖于$a(x)$．

设$u_1(x)$和$u_2(x)$是方程（1）的解，分别对应位移$a_1(x)$和$a_2(x)$．设

$$\|a_2(x)-a_1(x)\|_{C[a,\ b]}<\varepsilon.$$

记$y=a_1(x)$　$(a\leqslant x\leqslant b)$，其反函数为$x=\beta(y)$　$(a\leqslant y\leqslant b)$．记$a_2(x)-a_1(x)=\gamma(y)$　$(a\leqslant y\leqslant b)$，则$\gamma(a)=\gamma(b)=0$，$\|\gamma(y)\|_{C[a,\ b]}<\varepsilon$．

我们有

$$u_1(x)=\lambda\left[\int_a^b\frac{K(s,\ u_1(s))\ u_1(s)}{s-a_1(x)}ds+g(x)\right]=\lambda\left[\int_a^b\frac{K(s,\ u_1(s))\ u_1(s)}{s-y}ds+g(x)\right],$$

$$u_2(x)=\lambda\left[\int_a^b\frac{K(s,\ u_2(s))\ u_2(s)}{s-a_2(x)}ds+g(x)\right]=\lambda\left[\int_a^b\frac{K(s,\ u_2(s))\ u_2(s)}{s-y-\gamma(y)}ds+g(x)\right].$$

于是

$$u_2(x)-u_1(x)=\lambda(Bu_2-Bu_1)+\lambda\int_a^b K(s,\ u_2(s))\ u_2(s)\frac{\gamma(y)}{(s-y)(s-y-\gamma(y))}ds,$$

其中B为算子$Bu=\int_a^b\frac{K(s,\ u(s))\ u(s)}{s-y}ds$．记$\varphi(y)=$

$\lambda\int_a^b K(s,\ u_2(s))\ u_2(s)\frac{\gamma(y)}{(s-y)(s-y-\gamma(y))}ds$，则在$\|\gamma(y)\|_{C[a,\ b]}<\varepsilon$时，显然有

$\|\varphi(y)\|_{L_p}<N\varepsilon$，其中$N$为常数，而在$|\lambda|<\min\{\lambda_0,\ \lambda_1\}$时，类似于定理3，我们有$\|\lambda(Bu_2-Bu_1)\|_{L_p}\leqslant a\|u_2-u_1\|_{L_p}$，其中$0<a<1$，于是$\|u_2-u_1\|_{L_p}\leqslant\frac{N\varepsilon}{1-a}$．

而由Hölder空间中的乘法不等式[3]、[4]，有

$$\|u_2-u_1\|_{C[a,\ b]}\leqslant l\,\|u_2-u_1\|_{H_\delta}^{\frac{1}{1+sp}}\|u_2-u_1\|_{L_p}^{\frac{\delta p}{1+\delta p}},$$

其中

$$l=\max\left\{\frac{1+\delta p}{(\delta p)^{\frac{\delta}{1+\delta p}}},\ \frac{2^{\frac{1}{p}}(1+\delta p)}{\delta p(b-a)^{\frac{\delta}{1+\delta p}}}\right\}.$$

于是注意u_1，u_2　$H_{R,K,\delta}$．我们得

$$\|u_2-u_1\|_{C[a,\ b]}\leqslant 2^{\frac{1}{1+\delta p}}l(R+K)^{\frac{1}{1+\delta p}}\left(\frac{N}{1-a}\right)^{\frac{\delta p}{1+\delta p}}\varepsilon^{\frac{\delta p}{1+\delta p}},$$

由此得方程（1）的解连续依赖于$a(x)$．

参　考　文　献

[1] Литвинчук, Г. С, Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, 1977.

[2] 赵桢，带位移的奇异积分方程的Noether理论，应用数学与计算数学，6，1979，53—60.

[3] А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, Воедение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений, 1980.

[4] Х. Щ. Мухтаров, Исследование одного класса НСИУ с ЯДРОМ Гильберта, ДАН СССР, 1964, 154, No. 1, 48—50.