1986年7月

数学研究与评论
第六卷 第三期

若干个线性算子的范数同时逼近于其谱半径之可能性*

游兆永 刘忠贵

（西安交通大学数学系）

本文证明了Banach 空间上任意有限个两两可换的线性算子可同时（即在与原空间范数等价的同一范数下）用其范数任意逼近于各自的谱半径．在有限维情形，更进一步推广上述结果到可同时化为上（或下）三角阵的算子族．

一、引 言

设E为任一复Banach空间，$A\in\mathscr{L}(E)$（E上连续线性算子的全体）．分别用$\rho(A)$和$\sigma(A)$表示A的正则集和谱集，则谱半径定义为$r(A)=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|=\inf\limits_{\lambda\in\rho(A)}|\lambda|$．由Banach逆算子定理知，算子的正则集、谱集及谱半径与空间上的范数无关（只要范数使E仍完备）．

关于算子的谱半径与其范数的关系，已有如下的重要结果：

定理Ⅰ[1] $r(A)=\lim\limits_{k\to\infty}\|A^k\|^{1/k}=\inf\limits_{k\geq1}\|A^k\|^{1/k}$．

定理Ⅱ[2] 对于任意的$\varepsilon>0$，存在空间E上一个与原空间范数$\|\cdot\|$等价的范数$\|\cdot\|_*$，使得算子A相应的范数满足 $\|A\|_*\leq\|A\|$，$r(A)\leq\|A\|_*\leq r(A)+\varepsilon$．

定理Ⅱ的意义在于，对于给定的算子A，可用空间E上某适当的等价范数相应的算子A的范数逼近于其谱半径．但须注意，这些等价范数是与A相关的．在一些问题中，如果存在着空间上的同一范数，使在该范数下若干个算子的相应范数同时逼近于它们各自的谱半径，那将会是非常有用的．对此，本文得到了下面的结果（见定理1和定理2）．

二、一般 Banach 空间上算子情形

定理1 设$A_j\in\mathscr{L}(E)$，$j=1,\cdots,k$．若诸A_j两两可换，即$A_iA_j=A_jA_i$，$i,j=1,\cdots,k$，则对任意的$\varepsilon>0$，必存在着一个E上与原范数$\|\cdot\|$等价的范数$\|\cdot\|_*$（依赖于诸A_j及ε）．使在该范数下成立：

$$\|A_j\|_*\leq\|A_j\|,\quad j=1,\cdots,k, \tag{1}$$

$$r(A_j)\leq\|A_j\|_*\leq r(A_j)+\varepsilon,\quad j=1,\cdots,k. \tag{2}$$

证明 由于对任一范数总有$r(A)\leq\|A\|$，（2）式左端不等式是成立的．

当$k=1$时该定理即为定理Ⅱ．

现设定理对某个自然数k成立．若$\|A_j\|=r(A_j)$，$j=1,\cdots,k+1$，则取$\|\cdot\|_*=\|\cdot\|$即可．否则，不妨设$\|A_{k+1}\|>r(A_{k+1})$．由归纳假设，可对$A_1,\cdots,A_k$选取与原范数$\|\cdot\|$

* 1983年10月4日收到．

等价之范数 $|\cdot|$使

$$|A_j|\leq\|A_j\|,\quad j=1,\cdots,k,\tag{3}$$

$$r(A_j)\leq|A_j|\leq r(A_j)+\varepsilon,\quad j=1,\cdots,k.\tag{4}$$

记$r_j=r(A_j)$，$j=1,\cdots,k+1$．取 $\varepsilon_1=\min\{\varepsilon,\|A_{k+1}\|-r_{k+1}\}$．依定理Ⅰ，必存在自然数 n 使

$$|A_{k+1}^n|^{1/n}\leq r(A_{k+1})+\varepsilon_1\ .\tag{5}$$

对任意 $x\in E$，令

$$\|x\|_*=\sum_{j=0}^{n-1}(r_{k+1}+\varepsilon_1)^{n-1-j}|A_{k+1}^jx|.\tag{6}$$

易见$\|\cdot\|_*$为E上之范数，并且 $(r_{k+1}+\varepsilon_1)^{n-1}|x|\leq\|x\|_*\leq\left\{\sum_{j=0}^{n-1}(r_{k+1}+\varepsilon_1)^{n-1-j}|A_{k+1}^j|\right\}\cdot|x|$，于是，$\|\cdot\|_*$确是与$|\cdot|$等价从而与原范数$\|\cdot\|$亦等价之范数．由于（5），有 $\|A_{k+1}x\|_*=\sum_{j=0}^{n-1}(r_{k+1}+\varepsilon_1)^{n-1-j}|A_{k+1}^{j+1}x|\leq(r_{k+1}+\varepsilon_1)\sum_{j=0}^{n-1}(r_{k+1}+\varepsilon_1)^{n-1-j}|A_{k+1}^jx|=(r_{k+1}+\varepsilon_1)\|x\|_*$，故有$\|A_{k+1}\|_*\leq r_{k+1}+\varepsilon_1$．

据 ε_1 的取法，又有

$$\|A_{k+1}\|_*\leq\|A_{k+1}\|\ ,\tag{7}$$

$$r(A_{k+1})\leq\|A_{k+1}\|_*\leq r(A_{k+1})+\varepsilon.\tag{8}$$

再依 A_i 与 A_{k+1} 之可换性，得 $\|A_ix\|_*=\sum_{j=0}^{n-1}(r_{k+1}+\varepsilon_1)^{n-1-j}|A_{k+1}^jA_ix|=\sum_{j=0}^{n-1}(r_{k+1}+\varepsilon_1)^{n-1-j}|A_iA_{k+1}^jx|\leq\sum_{j=0}^{n-1}(r_{k+1}+\varepsilon_1)^{n-1-j}|A_i|\cdot|A_{k+1}^jx|=|A_i|\cdot\|x\|_*$，$i=1,\cdots,k$．

这样，$\|A_i\|_*\leq|A_i|$，$i=1,\cdots,k$．由此且据归纳假设（3）、（4）并注意（7）、（8）二式即知（1）、（2）对 $k+1$ 成立．据归纳原理，定理对一切 k 成立．▌

推论Ⅰ 若 $A_j(j=1,\cdots,k)$ 均为 $A\in\mathscr{L}(E)$ 的多项式，则定理1之结论成立．▌

二、有穷维空间上算子情形

定理2 设E为有穷维（n维）空间．$A_j\in\mathscr{L}(E)$，$j=1,\cdots,k$．若存在E上某一基，使在该基下诸算子 A_j 的矩阵表示同为上三角阵或同为下三角阵，则定理1中结论（2）成立．

为证明本定理，需要如下简单引理．

引理Ⅰ 设 $A=(a_{ij})$ 为任一n阶方阵，$P=\mathrm{diag}(1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{n+1})$，$(\varepsilon\neq0)$，并记$B=P^{-1}AP$，则

$$b_{ij}=\varepsilon^{j-i}a_{ij},\quad i,j=1,\cdots,n.\quad ▌\tag{9}$$

定理2的证明 不妨设诸算子 A_j 在基 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ 下的矩阵表示为上三角阵（仍表作$A_j=(a_{il}^{(j)})$）.

对任意的 $\varepsilon>0$，令$v_i=\varepsilon^{i-1}u_i$，$i=1,\cdots,n$，则算子 A_j 在基 $\{v_1,\cdots,v_n\}$下的矩阵表示示为

$$B_j=P^{-1}A_jP,\quad j=1,\cdots,k, \tag{10}$$

其中 P 系由引理 1 中所给定，

表任一 $x\in E$ 为 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i v_i$，定义范数

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|. \tag{11}$$

由引理 1 知

$\|A_jx\|=|a_{11}^{(j)}\xi_1+\cdots+a_{nn}^{(j)}\xi_n|+\varepsilon|a_{12}^{(j)}\xi_2+\cdots+a_{n-1,n}^{(j)}\xi_n|+\cdots+\varepsilon^{n-1}|a_{nn}^{(j)}\xi_n|.$

若令 $M=\max\limits_{\substack{1\le N,l\le n\\1\le j\le k}}|a_{i,l}^{(j)}|$，并注意到可设 $\varepsilon\le1$ 及 $r(A_j)=\max\limits_{1\le i\le n}|a_{ii}^{(j)}|$，得

$$\|A_jx\|\le r(A_j)+(n-1)\varepsilon M)\cdot\|x\|,\quad \text{于是}$$

$$\|A_j\|\le r(A_j)+(n-1)\varepsilon M,\quad j=1,\cdots,k. \tag{12}$$

但 n，M为常数，ε 任意，故定理 1 中（2）成立．∎

四、附　　注

注 1　在有穷维情形下定理 2 蕴含定理 1．这由如下的引理即可明瞭．

引理 2　设A_j（$j=1,\cdots,k$）均为 n 阶复方阵且两两可换，则必存在酉矩阵U 使$U^{-1}A_jU$（$j=1,\cdots,k$）同时成为上三角阵．

证明　对矩阵阶数用归纳法并应用下面的引理．∎

引理 3　设 n 维线性空间V_0 上的线性算子A_1，$\cdots$，A_m 两两可换，则存在子空间 $V_0\supset V_1\supset\cdots\supset V_m$，其中 $V_m\ne\{0\}$，V_p 是A_q（$p\le q$）的不变子空间，并且是 A_p 在V_{p-1}中的特征子空间．因此，诸 A_i（$i=1,\cdots,m$）在 V_0 上必有共同的特征向量．

注 2　在有穷维情形下，定理 1 不蕴含定理 2．例如，设$E=R^2$，A_1，A_2 在标准坐标下的矩阵表示为

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},$$

那么 A_1，A_2 均为上三角阵，但

$$A_1A_2=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}\ne\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}=A_2A_1.$$

注 3　作为定理 1 和定理 2 的一个应用，在相应的假定下可立即证明

$$r\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}r(A_i). \tag{16}$$

事实上，由于

$$r\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)\le\left\|\sum_{i=1}^{k}A_i\right\|_{\cdot}\le\sum_{i=1}^{k}\|A_i\|_{\cdot}\le\sum_{i=1}^{k}r(A_i)+k\varepsilon,$$

而ε 为任意正数，故（16）式得证．类似地可证

$$r\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \prod_{i=1}^{k} r(A_i) , \tag{17}$$

$$r(P(A_1, \cdots, A_k)) \leq \overline{P}(r(A_1), \cdots, r(A_k)) , \tag{18}$$

其中 P 为任一 k 个变元的多项式，而 k 元多项式 $\overline{P}(\cdots)$ 是由原多项式 P 中各系数换为其绝对值而 .

参考文献

〔1〕Л.В.Канторович И Г.П.Акилов, Функциональный анализ В нормированых пространствах, 1959.

〔2〕М.А.Красносельский И Т.Д., Приближенное решение операторных уравнений, 1969.

On Finite Systems of Linear Operators Whose Norms May Be Used to Approximate Their Spectral Radii Simultaneously

You Zhao-yong Liu Gui-zhong

(Mathematics Department of Xi′an Jiao-tong University)

Abstract In this paper it is proved that a family of linear operatots on′ a Banach space which are commutative with each other may approximate their spectral radii with their respective norms simultaneously (i.e., under a common space norm equivalent to the original one). For the finite dimension case it is further shown that the above result can be extended to a family of operators which can be reduced simultaneously to upper (or lower) triangular matrices.