具非正则系数的某二阶微分算子的一个L^2估计*

仇庆久
（南京大学）

在研究具重特征的微分算子的性态时，人们常常将下述算子作为一个典型的例子：

$$P=\sum_{j=1}^{k}X_j^2+X_0 \tag{1}$$

此中X_j（$j=0,1,\cdots,k$）是域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$上的具$C^\infty$系数的实矢量场.

L. Hörmander〔1〕首先证明了如下结果：若Ω上的矢量场所组成的空间由（$X_0,X_1,\cdots,X_k$）所生成的$C^\infty(\Omega)$上的李代数所构成，则P是一个亚椭园算子．并且，他在该文中还指出，由Frobenius定理可知上述条件对P的亚椭园性本质上还是必要的．Hövmander的证明比较艰难．后来，J. J . Kohn〔2〕用拟微分算子理论大大简化了他的证明．而M. E. Taglor在他的书中〔3〕又用Kohn的方法将它推广到X_j为具实主象征的一阶拟微分算子.

上述结果证明中最关健的一点是对任意$U\subset\subset\Omega$建立如下L^2估价：

$$\|u\|_{H^\varepsilon}\leqslant C\|Pu\|_{L^2}+C\|u\|_{L^2},\quad u\in C_0^\infty(U) \tag{2}$$

特别地，若Ω上任一实矢量场可用$X_1,\cdots,X_k$及其单个交换子〔X_j，X_l〕（$j,l=1,\cdots,k$）的C^∞综性组合时,（2）可加强为

$$\|u\|_{H^1}\leqslant C(\|Pu\|_{L^2}+\|u\|_{L^2}),\qquad u\in C_0^\infty(U)\ . \tag{3}$$

诚然，在上述讨论中，系数是C^∞的条件是很重要的。在本文中企图减弱这个条件而只要求系数具有适当阶导数。为此我们将需要关于具非正则象征的拟微分算子的L^2连续性理论及此类拟微分算子的运算．有关这方面的理论，有些已经建立，有些将在本文中根据需要建立．另外，本文只建立不等式（3）．至于不等式（2），可以用同样方法得到，这在本文中就不去讨论了.

对（1），设$X_j=\sum_{m=1}^{n}a_j^m(x)\frac{\partial}{\partial xm}$，$j=0,1,\cdots,k$，此处$a_j^m(x)$（$j\neq 0$）是$\Omega$上的实值$C^{4(n+1)}$函数，$a_0^m(x)$则为实值$C^{2n+3}$函数．不失一般性地我们可以认为$\Omega$是$\mathbf{R}^n$中有界开域.

我们假设，Ω上任一实矢量场可用$X_1,\cdots X_k$及它们的单个交换子〔X_j，X_l〕（$j,l=1,\cdots,k$）的C^1线性组合表出.

先建立下面一些引理：

引理1 若$a_j^m(x)\in C^1(\Omega)$，$j=0,\cdots,k$，$m=1,\cdots,k$．则存在常数$C>0$，使有

* 1983年11月22日收到.

$$\sum_{j=1}^{n}\|X_j u\|^2 \leqslant C(|(Pu,u)| + \|u\|^2), \qquad u \in C_0^\infty(\Omega) \tag{4}$$

此处符号 $\|\cdot\|$ 表示L^2意义下的模 $\|\cdot\|_{L^2}$ 。

证 注意到$X_j^* u = -X_j u + f_j u$，$f_j = -\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial a_j^m}{\partial x_m} \in C(\Omega)$，这个引理就可以完全类似于〔2〕中得到。

引理2 存在一个零阶（1,0）型的拟微分算子$R \in S_{1,0}^0$，使得

$$|(Du, Ru)| = o(\|u\|_{1/2}^2) \tag{5}$$

此处符号 $\|\cdot\|_{1/2}$表示$H^{1/2}$意义下的模 $\|\cdot\|_{H^{1/2}}$；$D = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_j$，$a_j \in D_0^\infty$且支紧互相隔离.

证 由Fourier变换D_j之象征$\sigma(D_j) = \xi_j$. 取算子R_j使得它的象征$\sigma(R_j) = \dfrac{\xi_j}{(1+|\xi|^2)^{1/2}}$

所以$R_j \in S_{1,0}^0$.

对任意$u \in C_0^\infty$，$\hat{u} \in$ 且$\xi_j \hat{u}$和$\dfrac{\xi_j}{(1+|\xi|^2)^{1/2}}$均属于$\varphi$. 可利用Parseval 等式有:

$$(D_j u, R_j u) = \left(\xi_j \hat{u}(\xi), \frac{\xi_j}{(1+|\xi|^2)^{1/2}}\hat{u}(\xi)\right) = \left(\hat{u}(\xi), \frac{\xi_j^2}{(1+|\xi|^2)^{1/2}}\hat{u}(\xi)\right)$$

从而 $\sum_{j=1}^{n}(D_j u, R_j u) = (\hat{u}(\xi), (1+|\xi|^2)^{1/2}\hat{u}(\xi)) = (u, \wedge u) = (\wedge^{1/2}u, \wedge^{1/2}u) = \|u\|_{1/2}^2$

这就表示存在$R \in S_{1,0}^0$，且它不依赖于x，使得(5)式成立.

引理3 设$p(x,\xi)$ 是$\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n$上的有界连续函数，且它满足如下条件，当$|\alpha| \leqslant n+1$时，

$$|D_\xi^\alpha p(x,\xi)| \leqslant C_\alpha (1+|\xi|)^{-\alpha} \tag{6}$$

$$|D_\xi^\alpha p(x,\xi) - D_\xi^\alpha p(y,\xi)| \leqslant C_\alpha |x-y|^\sigma (1+|\xi|)^{-|\alpha|+\sigma\tau} \tag{7}$$

其中$0 < \sigma \leqslant 1$，$0 \leqslant \tau < 1$. 则由

$$p(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \tag{8}$$

所定义的拟微分算子$p(x,D)$ 是L^2有界的.

证 参见M. Nagase〔4〕中定理A.

注 在本文中，我们将用到的是$\sigma=1$及$\tau=0$的情形，特别地对$p(x,\xi)$ 满足（6）且$D_\xi^\alpha p(x,\xi)$ ($|\alpha| \leqslant n+1$) 关于x是l次连续可微的情形（$l \geqslant 1$）. 对这类象征，我们记以$S_{1,0}^0(n+1,l)$. 类似地可定义象征类$S_{1,0}^m(n+1,l)$；且可证明，对由此象征类用（8）所定义的拟微分算子类是$H^s \to H^{s-m}$有界的.

引理4 设$p_1(x,\xi)$ 及$p_2(x,\xi)$ 分别属于$S_{1,0}^{m_1}(n+1,l_1)$ 及$S_{1,0}^{m_2}(n+1,l_2)$，l_2为适当大的正整数且设$p_2(x,\xi)$ 关于x有紧支集. 则由它们相应算子P_1，P_2的复合$P = P_1 P_2$，其象征$p(x,\xi) \in S_{1,0}^{m_1+m_2}(n+1,l)$，此中

$$l = \min(l_1, r), \qquad r \leqslant \begin{cases} l_2 - m_1 - (n+1), & m_1 \geqslant n+1 \\ l_2 + m_1 - 2(n+1), & m_1 < n+1 \end{cases} \tag{9}$$

证 $P_2 u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle} p_2(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi$，$u \in C_0^\infty(\Omega)$.

由假设$P_2 u(u) \in C_0^{l_2}$，于是$P_1(P_2 u) = (P_1 P_2)u$有意义，且在振荡积分意义下可用积分表示.

$$(P_1 P_2)u(x) = (2\pi)^{-2n}\int e^{i\langle x-y,\eta\rangle} p_1(x,\eta)\left[\int e^{i\langle z-y,\xi\rangle} p_2(z,\xi)u(y)\,dy\,d\xi\right]dz\,d\eta$$

$$=(2\pi)^{-2n}\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\left[\int e^{i\langle x-z,\eta-\xi\rangle}p_1(x,\xi)p_2(z,\xi)\mathrm{d}z\mathrm{d}\eta\right]u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi .$$

由此可见$p(x,\xi)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x-z,\eta-\xi\rangle}p_1(x,\eta)p_2(z,\xi)\mathrm{d}z\mathrm{d}\eta$

或改写为$p(x,\xi)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x-z,\zeta\rangle}p_1(x,\zeta+\xi)p_2(z,\xi)\mathrm{d}z\mathrm{d}\zeta$ 积分中视ξ为参数，易知$p(x,\xi)$ 关于$x\in C^{|\beta|}$,

$$|\beta|=\min(l_1,l_2-m_1-R),\qquad R\geqslant n+1 . \tag{10}$$

要观察$p(x,\xi)$ 所属的象征类，必须研究$\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta p(x,\xi)$，$|\alpha|\leqslant n+1$，$|\beta|\leqslant l$

$$\partial_\xi^\alpha\partial_x^\mu p(x,\xi)=\int\partial_\xi^\alpha\left\{\left[\sum_{|\delta|\leqslant|\beta|}\zeta^\delta\partial_x^{\beta-\delta}p_1(x,\zeta+\xi)\right]e^{i\langle x,\zeta\rangle}p_2(\zeta,\xi)\right\}\mathrm{d}\zeta \tag{11}$$

此中$\hat{p}_2(\zeta,\xi)$ 表示p_2对x的Fourier变换．注意到$p_2(x,\xi)$ 关于x为l_2次连续可微且有紧支集，有$|\zeta^\gamma\partial_\xi^\theta\hat{p}_2(\zeta,\xi)|\leqslant C_0(1+|\xi|)^{m_2-\theta}$，$|\gamma|=l_2$ ． 所以

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta p(x,\xi)|=\left|\sum_{|\delta|\leqslant|\beta|}\sum_{|\theta|\leqslant|\alpha|}\int e^{i\langle x,\zeta\rangle}\zeta^\delta\cdot\partial_\xi^{\alpha-\theta}\partial_x^{\beta-\delta}p_1(x,\zeta+\xi)\cdot\partial_\xi^\theta\hat{p}_2(\zeta,\xi)\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\leqslant\sum_{|\delta|\leqslant|\beta|}\sum_{|\theta|\leqslant|\alpha|}C_\theta(1+|\xi|)^{m_2-\theta}\int|\zeta|^{|\delta|-|\gamma|}(1+|\zeta+\xi|)^{m_1-|\alpha-\theta|}\mathrm{d}\zeta$$

现考虑上述右边不等式中的一般项．由Peetre 不等式

$$(1+|\zeta+\xi|)^{m_1-|\alpha-\theta|}\leqslant C(1+|\xi|)^{m_1-|\alpha-\theta|}(1+|\zeta|)^{|m_1-|\alpha-\theta||} \tag{12}$$

该一般次$\leqslant C'_\theta(1+|\xi|)^{m_1+m_2-|\alpha|}\int(1+|\zeta|)^{|m_1-|\alpha-\theta||-|\gamma|+|\delta|}\mathrm{d}\zeta$．此积分收敛的条件是

$$|m_1-|\alpha|+|\theta||-|\gamma|+|\delta|\leqslant-(n+1) \tag{13}$$

注意到$|\gamma|=l_2$，$|\delta|\leqslant|\beta|=l\leqslant l_1$ ，$|\alpha|\leqslant n+1$，$|\theta|\leqslant|\alpha|$．当$m_1\geqslant n+1$ 时，由上式可得条件为$m_1-l_2+|\beta|\leqslant-(n+1)$，这就和条件（10）重合．

当$m_1<n+1$ 时，由（13)，对应于$m_1\geqslant|\alpha|-|\theta|$ 的那些θ的项，只要（10）就可保证相应的积分收敛．但对$m_1<|\alpha|-|\theta|$ 的那些θ的项，为使相应的积分收敛，则要求成立下式:

$$|\beta|\leqslant m_1+l_2-2(n+1) \tag{14}$$

结合（10）及（14）两式即得（9）式．且由上述易知此时$p(x,\xi)\in S_{1,0}^{m_1+m_2}(n+1,l)$．

注 由（9）式知道，为使l为$\geqslant1$的正整数，必须要求l_2适当大．在本文下面论证中仅需$l=1$，且l_1可为∞，m_1为$\leqslant1/2$的正数．这样我们就要求

$$l_2\geqslant1-m_1+2(n+1)\geqslant2n+3 , \tag{15}$$

现在着手证明不等式（3)．设$u\in C_0^\infty(\Omega)$，Ω是$\mathbf{R}^n$中的有界开域．

由假定 $D=\sum_{j,l=1}^k b_{jl}[X_j,X_l]+\sum_{j=1}^k b_jX_j$，此中$b_{jl},b_j\in C^1$ ．

取R为引理 2 中的零阶拟微分算子．于是

$$(Du,Ru)=\sum_{j,l=1}^k(b_{jl}X_jX_lu,Ru)-\sum_{j,l=1}^k(b_{jl}X_lX_ju,\ Ru)+\sum_{j=1}^k(b_jX_ju,\ Ru)$$

$$=\sum_{j,l=1}^k(X_jb_{jl}X_lu,\ Ru)-\sum_{j,l=1}^k(X_lb_{jl}X_ju,Ru)+\sum_{j=1}^k(b_jX_ju,Ru)$$

$$+\sum_{j,l=1}^k([b_{jl},X_j]X_lu,Ru)-\sum_{j,l=1}^k([b_{jl},X_l]X_ju,\ Ru)$$

由X_j之系极，b_{jl}及b_j之可微性的假设，交换子〔b_{jl}，X_j〕及〔b_{jl}，X_l〕是零阶微分算子且上

式右边第三，四，五项均有估计 $O\left(\sum_{j=1}^{k}\|X_j u\|\cdot\|u\|\right)$．另外，注意

$$(X_j b_{jl} X_l u, Ru) = -(b_{jl} X_l u, X_j Ru) + O(\|X_l u\|\cdot\|u\|).$$

可得如下估计 $|(Du, Ru)| \leqslant \sum_{j,l=1}^{k}\|X_j u\|\cdot\|X_l Ru\| + O\left(\sum_{j=1}^{k}\|X_j u\|\cdot\|u\|\right)$

$$\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{k}\|X_j u\|^2 + \sum_{j=1}^{k}\|X_j Ru\|^2 + \|u\|^2\right)$$

不失一般性仍可认为 $Ru \in C_0^\infty(\Omega)$．由引理 1 有

$$|(Du, Ru)| \leqslant C[(Pu, u) + (PRu, Ru) + \|u\|^2]$$

再由引理 2 可知：$\|u\|_{1/2}^2 \leqslant C(\|Pu\|_{1/2}\cdot\|u\|_{1/2} + \|PRu\|_{1/2}\cdot\|u\|_{1/2} + \|u\|^2)$

所以
$$\|u\|_{1/2}^2 \leqslant C(\|Pu\|_{1/2}^2 + \|PRu\|_{1/2}^2 + \|u\|^2) \tag{16}$$

现用 $\Lambda^{1/2}u$ 代替上述不等式中的 u，此处 Λ 的象征是 $(1+|\xi|^2)^{1/2}$．于是 $\Lambda^{1/2}$ 及 $R\Lambda^{1/2}$ 均属于 $S_{1\,0}^{1/2}$，且它们与 x 无关．我们将它们统一记为算子 S，故有

$$\|u\|_1^2 \leqslant C(\|PSu\|_{-1/2}^2 + \|u\|^2) \tag{17}$$

现在来处理 $\|PSu\|_{1/2}^2$．$PSu = SPu + [P, S]u$，而

$$[P, S]u = \sum_{j=1}^{k}[X_j^2, S]u + [X_0, S]u \tag{18}$$

此中
$$\begin{aligned}[X_j^2, S] &= X_j^2 S - S X_j^2 = (X_j S - S X_j) X_j + X_j^2 S - X_j S X_j \\ &= [X_j, S] X_j + X_j (X_j, S] = 2[X_j, S] X_j + [X_j, [X_j, S]].\end{aligned} \tag{19}$$

由引理 4 及其注可知，当 X_j 之系数属于 C^{2n+3} 时 $[X_j, S] \in S_{1,0}^{1/2}(n+1, 1)$，且当 X_j 之系数加强为属于 $C^{4(n+1)}$ 时 $[X_j, [X_j, S]] \in S_{1\,0}^{1/2}(n+1, 1)$．于是，由引理 3 及引理 1

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\|[X_j^2, S]u\|_{1/2}^2 &\leqslant C\sum_{j=1}^{k}\|[X_j, S]X_j u\|_{-1/2}^2 + C\sum_{j=1}^{k}\|[X_j, [X_j, S]]u\|_{-1/2}^2 \\ &\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{k}\|X_j u\|^2 + \|u\|^2\right) \leqslant C(\|Pu\|^2 + \|u\|^2).\end{aligned} \tag{20}$$

另外，当 X_0 之系数属于 C^{2n+3} 时 $[X_0, S] \in S_{1,0}^{1/2}(n+1, 1)$．由引理 3 $\|[X_0, S]u\|_{-1/2}^2 \leqslant C\|u\|^2$．再注意到 $\|SPu\|_{-1/2}^2 \leqslant C\|Pu\|^2$．于是结合（18）、(20) 就有 $\|PSu\|_{-1/2}^2 \leqslant C\|Pu\|^2$．将它代入（17）可得 $\|u\|_1^2 \leqslant C(\|Pu\|^2 + \|u\|^2)$，此即所要求的不等式（3）．

最后，应当指出，签于算子（1）及不等式（3）的重要性，进一步再减弱上述可微性的条件是一件非常有意义的事．

参 考 文 献

〔1〕L. Hörmander: Hypoelliptic second order differential equations., Acta Math. 119(1967), 147—171.

〔2〕J.J. Kohn: Pseudo-differential operators and hypoellipticity., In Proc. Symp. Pure Math. Vol 23(1973), 61—69.

〔3〕M. E Tayler: Pseudodifferential Operators, Princeton University Press (1981).

〔4〕M. Nagase: Jhe L^p—boundedness of pseudo-differential operators With non-regular symbols., C. P. D. E. 2(10),(1977), 1045—1061.