Liénard 方程存在极限环的二个充分条件*

陈　秀　东

（大连工学院应用数学研究所）

对 Liénard 方程

$$\dot{x}=y-F(x)\ ,\quad \dot{y}=-g(x) \tag{$*$}$$

作 Филиппов 变换[1,2] $z=\int_0^x g(\xi)d\xi$，得到二个方程

$$\frac{dz}{dy}=F_i(z)-y\ ,\quad (i=1,2)\ . \tag{i}$$

设（※）满足解的存在唯一性条件，$F_1(z)=-F_2(z)$，$F_1'(z)$ 连续，$F_1'(0)<0$. 记 $F(z)=F_1(z)$，方程（1）可写为

$$\frac{dz}{dy}=F(z)-y. \tag{3}$$

方程（3）的过点 $(z_0,F(z_0))$的、在特征曲线 $y=F(z)$ 上方的轨线用 $\bar{y}(z)$ 表示，下方的用 $y(z)$表示．针对文〔3〕中定义的二个状态函数 $\Phi_1(z_0)=\int_0^{z_0}F'(z)(\bar{y}-y)dz$, $\Phi_2(z_0)=\int_0^{z_0}F(z_0)\left(\frac{1}{F(z)-y}+\frac{1}{\bar{y}-F(z)}\right)dz$，运用微分方程比较定理于方程（3）、$\frac{dz}{dy}=m-y$、$\frac{dz}{dy}=M-y$（其中 $m=\min\limits_{[0,z_0]}F(z)$，$M=\max\limits_{[0,z_0]}F(z)$)，得到保证（※）存在极限环的三个充分条件：

定理 1　设 i）存在数 $0<\Delta<z_0$，使得

ii) $\int_0^{z_0}F'(z)[\sqrt{2(z_0-z)}+\sqrt{F(\Delta)-F(z_0))^2+2(z_0-z)}]dz$

$+(F(z_0)-(F(\Delta))(F(z_0)-2F(\Delta))>0$，

则方程（※）至少在一个稳定的极限环．

定理 2　设 i）满足定理 1 的条件 i）；

ii) $\int_0^{z_0}F(z)\left[\frac{1}{\sqrt{2(z_0-z)}}+\frac{1}{\sqrt{F(\Delta)-F(z_0))^2+2(z_0-z)}}\right]dz+2(F(z_0)-F(\Delta))^2$ >0，则方程（※）至少存在一个稳定的极限环．

参　考　文　献

〔1〕叶彦谦等，《极限环论》，上海科技出版社，1984．

〔2〕张芷芬等，《微分方程定性理论》，科学出版社，1985．

〔3〕陈秀东，状态函数零点与极限环（英文），微分方程年刊（英文版），Vol.1，No.2，1985．

* 1986年5月30日收到．