1986年7月

数学研究与评论
第六卷　第三期

关于图的支配划分的两个猜测*

赵亚谷

（上海铁道学院应用数学研究室）

Cockayne于一九七六年在美国密西根大学举行的国际《图论及其应用》会议上提出两个问题：（1）若图G的团图K(G)为奇圈，是否有$c(G)\leqslant d(G)$，（2）若团图K(G)为二部图，是否有$c(G)\leqslant d(G)$[1]。一九七七年，Cockayne和Hedetniemi将上述问题以猜测形式发表[2]。本文对猜测1提出了反例，对猜测2给出了证明。

一、定义

对任一图$G=(V,E)$，及集合$T\subset V$，若对每一顶点$v\,\overline{\in}\,T$，存在顶点$u\in T$，使得u与v邻接，则集合T称为图G的支配集．

若$D=(D_1,D_2,\cdots,D_\delta)$是图$G=(V,E)$的顶点集合V的一个划分，使得每个$D_i$都是G的支配集，则划分D称为图G的一个D-划分。在图G的所有D-划分中，包含子集D_i个数最多的D-划分，称为图G的最大D-划分。最大D-划分所包含的子集个数称为图G的支配划分数（domatic number），记作$d(G)$。

图G的 大完全子图，即不包含在其他完全子图内的完全子图，称为图G的团．团通常用顶点集合来表示，如图1中的图G有三个团：$C_1=\{a,b,c\}$，$C_2=\{b,c,d\}$，$C_3=\{b,d,e\}$。

包含顶点个数最少的团，称为图G的最小团。图G的最小团所包含的顶点个数记为$c(G)$．

$K(G)$为G的团图，其顶点与G的团一一对应，两顶点邻接，当且仅当对应团的交非空．

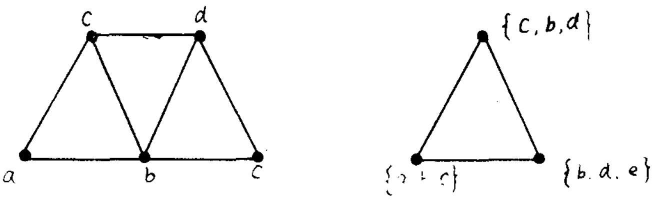

图1　图G及K(G)

二、反例与证明

E.J.Cockayne和S.T.Hedetniemi证明了：

1．若$K(G)$为偶圈，则有$c(G)\leqslant d(G)$．2．若$K(G)$为树　则有$c(G)\leqslant d(G)$．

并提出：

猜测1．若K(G)为奇圈，则有$c(G)\leqslant d(G)$．

猜测2．若K(G)为二部图，则有$c(G)\leqslant d(G)$．

猜想1是不成立的．我们有反例，见图2中的图G．图G由5个K_7连成圈，每两相邻K_7有三个公共顶点，G中除了K_7之外，不含有其他的团，因此$c(G)=7$，且K(G)是长度为5的奇圈．G包含20个顶点．若$d(G)\geqslant 7$，则顶点集合V可划分成7个支配集，于是至少存

• 1981年12月28日收到

在一个支配集所含的顶点数不超过2．但事实上G的任一支配集至少包含3个顶点，由此导致矛盾，所以$c(\mathrm{G})>d(\mathrm{G})$．

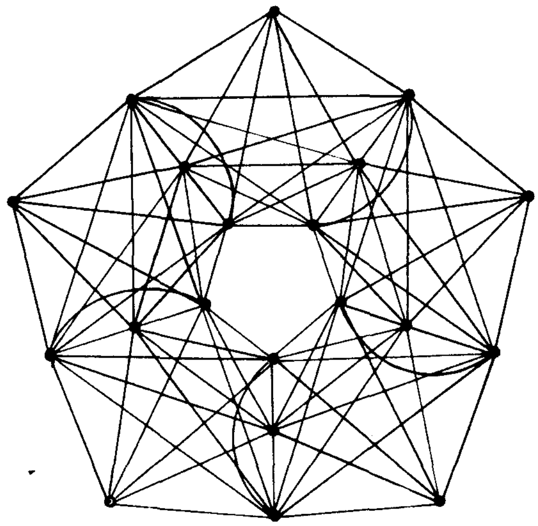

图2　猜测1的反例

猜测2成立．在证明过程中需引用下面两个引理．

引理1　图G为二部图，当且仅当G中无奇圈．

引理2　图G中任一奇数长的闭链必包含一个奇圈．

猜测2的证明：由于K(G)为二部图，图G中的每一顶点最多属于两个团，否则在K(G)中将产生奇圈由引理1与K(G)为二部图的假设矛盾．

设G有m个团，我们分别标号为K_1，K_2，$\cdots$，K_m，同时将K(G)中对应的顶点标号为$1,2,\cdots,m$．对于G中的每一顶点，我们用一个无序的两元数偶与之对应．若v属于两个不同的团K_i与K_j，则与之对应的数偶为(i,j)，若v仅属于K_i，则对应数偶为(i,i)．

我们用$c(\mathrm{G})$种颜色来对G的顶点进行任意着色，称之为D－着色．若C为D-着色，顶点v在C下着上的颜色记为$\mathrm{C}(v)$，且用$\mathrm{C}(u)\neq\mathrm{C}(v)$表示顶点$u$与$v$的着色不同。在着色C下，团$\mathrm{K}_i$中顶点着上的颜色的种类数记为$\mathrm{C}_i$，显然$\mathrm{C}_i\leqslant c(\mathrm{G})$．图G的D-着色函数定义为

$f(c)=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{C}_i$．若存在D-着色$\mathrm{C}'$使得$\mathrm{C}'_i=c(\mathrm{G})$对所有的$i$成立，也就是$f(\mathrm{C}')=m\cdot c(\mathrm{G})$．那末所有着上同一颜色的顶点恰构成G的一个支配集，因此V(G)被划分成$c(\mathrm{G})$个支配集，由此推出$c(\mathrm{G})\leqslant d(\mathrm{G})$．

假定对于任一D-着色C，均有$f(c)<m\cdot c(\mathrm{G})$．设$\overline{\mathrm{C}}$为D-着色，使$f(\overline{\mathrm{C}})$为最大，即对任一D-着色$\mathrm{C}'$，均有$f(\overline{\mathrm{C}})\geqslant f(\mathrm{C}')$．由于$f(\overline{\mathrm{C}})<m\cdot c(\mathrm{G})$，因此至少有一个团$\mathrm{K}_{i_1}$，使得$\mathrm{C}_{i_1}<c(\mathrm{G})$。于是有一种颜色$\alpha$在$\mathrm{K}_{i_1}$中的顶点上不出现，又有一种颜色$\beta$，$\mathrm{K}_{i_1}$中至少有两个顶点着上$\beta$色．任取一个着上$\beta$色的顶点$v_1$，若$v_1$对应的数偶为$(i_1,i_1)$，则$v_1$改着$\alpha$色，其余点的着色不变，得D-着色C，易见$f(\mathrm{C})>f(\overline{\mathrm{C}})$，于是与$\overline{\mathrm{C}}$的假设矛盾．所以$v_1$的对应数偶应为$(i_1,i_2)$，其中$i_1\neq i_2$．

称道路D为关于D-着色$\overline{\mathrm{C}}$的点色交错道路$\mathrm{P}=\{u_1,u_2,\cdots u_q\}$，若满足：

1．道路中的顶点染有的颜色为α,β两色，且在道路P中交错出现．

2．对应于道路P中的顶点的数偶构成序列$\mathscr{P}=\{(j_1,j_2),(j_2,j_3),\cdots,(j_g,j_{g+1})\}$，其中$j_k\neq j_{k+1}(k=1,2,\cdots g)$．

3．在团$\mathrm{K}_{j_{g+1}}$中不存在点u，满足$\overline{\mathrm{C}}(u)\in\{\alpha,\beta\}$，$\overline{\mathrm{C}}(u)\neq\overline{\mathrm{C}}(u_g)$，$\{u\}\cap\{u_1,u_2,\cdots,u_g\}=\varnothing$及$u$对应的数偶为$(i_{g+1},i_{g+2})$，其中$i_{g+1}\neq i_{g+2}$．

由于着色为α或β的顶点是有限的，因此总存在一条以v_1为起点的点色交错道路$\mathrm{P}=\{v_1,$

$v_2,\cdots,v_s\}$，对应的数偶序列为 $\mathscr{P}=\{(i_1,i_2),(i_2,i_3),\cdots,(i_s,i_{s+1})\}$．因为 K_{i_1} 中无顶点着上 α 色，故 v_2，v_3，…，v_s 均不属于 K_{i_1}．

对于点色交错道路P，分成下列三种情况加以讨论：

Ⅰ．$P=\{U_1\}$．这时团 K_{i_2} 中或者无顶点着上 α 色，或者 K_{i_2} 中有顶点 v 着上 α 色，但 v 对应的数偶为 (i_2,i_2)．在前一子情况下将 v_1 改着 α 色，其余顶点的着色不变，导出D-着色C，易见 $f(c)>f(\overline{c})$，于是导致矛盾；在后一子情况下，将 v 改着 β 色，v_1 改着 α 色，其余顶点的着色保持不变，亦可导出D-着色 C，使得 $f(c)>f(\overline{c})$，故亦推出矛盾．

Ⅱ．$P=\{v_1,v_2,\cdots,v_s\}$，其中 $s\geqslant 2$，对应的数偶序列 $\mathscr{P}=\{(i_1,i_2),(i_2,i_3),\cdots(i_s,i_{s+1})\}$，且有 $i_1=i_{s+1}$．由于 K_{i_1} 不包含着色为 α 的顶点，从而道路P包含奇数个顶点．由点色交错道路的定义得 $i_h\neq i_{h+1},(h=1,2,\cdots,s)$，故道路P中的每一顶点 V_n 对应于K(G)中的一条边 (i_h,i_{h+1})．于是数偶序列 $\mathscr{P}=\{(i_1,i_2),(i_2,i_3),\cdots,(i_s,i_1)\}$ 对应于K(G)中的一条从顶点 i_1 出发途径 $i_2,i_3,\cdots,i_s$ 的奇数长的闭链．由引理2，K(G)包含一个奇圈．又因K(G)为二部图，由引理1导致矛盾．

Ⅲ．$P=\{v_1,v_2,\cdots,v_s\}(s\geqslant 2)$，对应的数偶序列 $\mathscr{P}=\{(i_1,i_2),\cdots,(i_s,i_{s+1})\}$，且 $i_{s+1}\neq i_1$．点色交错道路P以 U_s 为终点，下列三种子情况必有一种发生：

1．团 $K_{i_{s+1}}$ 中存在顶点 v，满足 $\overline{C}(v)\in\{\alpha,\beta\}$，$\overline{C}(v)\neq\overline{C}(v_s)$，但 $v\in\{v_1,v_2,\cdots,v_{s-1}\}$．

2．团 $K_{i_{s+1}}$ 中不存在顶点 v，满足 $\overline{C}(v)\in\{\alpha,\beta\}$，$\overline{C}(v)\neq\overline{C}(v_s)$．

3．团 $K_{i_{s+1}}$ 中存在顶点 v，满足 $\overline{C}(v)\in\{\alpha,\beta\}$ 及 $\overline{C}(v)\neq\overline{C}(v_s)$，但对应的数偶为 (i_s,i_{s+1})．

对于任一 $h(1<h<s+1)$，K_{i_h} 包含着色为 α 与 β 的顶点．事实上 (i_{h-1},i_h) 与 (i_h,i_{h+1}) 所对应的顶点 v_{h-1} 与 v_h 属于 K_h，按P的定义，v_{h-1} 与 v_h 的着色依次为 α,β 或 β,α．因此在1，2子情况下，将P中所有着 α 色的顶点改着 β 色，P中所有着 β 色的顶点改着 α 色，其余顶色的着色不变，导出D-着色C，对任一 j，$j\neq i_1$，i_{s+1} 有 $C_i=\overline{C_i}$．对于 $K_{i_{s+1}}$，或者 $K_{i_{s+1}}$ 仅包含着上 α 色或 β 色的顶点，或者包含着 α 色与 β 色的顶点，所以 $C_{i_{s+1}}\geqslant\overline{C}_{i_{s+1}}$．但对于 K_{i_1}，v_1 改着 α 色后，仍有顶点着 β 色，故 $C_{i_1}>\overline{C}_{i_1}$，因此 $f(\overline{C})<f(C)$，于是与 $\overline{C}$ 的假设矛盾．在情况3下，考虑集合 $\{v_1,v_2,\cdots,v_s,v\}$，此时 $K_{i_{s+1}}$ 亦包含着色为 α 与 β 的顶点．如将上述集合中所有着上 α 色的顶点改着 β 色，将集合中所有着上 β 色的顶点改着 α 色，其余顶点的着色不变，可导出D-着色C，这时 $C_{i_h}=\overline{C}_{i_h}(h\neq 1)$，而 $C_1>\overline{C}_1$，于是 $f(\overline{C})<f(C)$．这与 $\overline{C}$ 的假设矛盾。

由上述证明推知存在一个D-着色C，使得 $f(C)=m\cdot c(G)$，即每个团 K_i 中顶点均着上了 $c(G)$ 种颜色．由此推出 $c(G)\leqslant d(G)$．

定理 若K(T)为二部图，则 $c(G)\leqslant d(G)$．

Cockayne 和Hedetniemi提出的两个结果为本定理的两个推论：

推论1 若K(G)为偶圈，则有 $c(G)\leqslant d(G)$．

推论2 若K(G)为树，则有 $c(G)\leqslant d(G)$．

本文曾得到李鸿祥、吴望名两位老师的审查和指教，在此谨表示感谢．

参 考 文 献

〔1〕E. J. Cockayne, Domination of Undirected Graphs —A Sarvey, Theory and Applications of Graphs, Proceeding, Michigan, 1976.

〔2〕E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, Networks, Vol. 7, No. 3, 1977, pp247—261.

〔3〕Berge, C. Graphs and Hypergraphs. North Holland, 1973.