数学研究与评论
1986年7月　　第六卷　第三期

关于Orlicz空间的⊗-乘积问题*

肖跃龙　周爱辉

（湘潭大学）

§1　引言与反例

王声望教授在[1]中详细讨论了两个Orlicz空间的⊙-乘积问题。他在该文最后写道，对于⊗-乘积问题"本文§1到§3的全部结论都是正确的，甚至在定理的叙述与证明的方法上都基本相同。"文[1]§1的四个定理已总结在吴从炘，王廷辅的最新专著[2]第三章§3.2中。我们将这四个定理逐一移植到⊗-乘积问题时，发现只有前三个定理是可以按[1]的说明移植的，即以下三个命题正确：

命题1　$(L^*_{M_1}, L_{M_1}, E_{M_1})\otimes(L^*_{M_2}, L_{M_2}, E_{M_2})\subset L^*_M$ 的充要条件是：存在$a>0$和$u_0>0$，使$M(auv)\le M_1(u)M_2(v)$，$(u, v\ge u_0)$。

命题2　（i）$(L^*_{M_1}, L_{M_1})\otimes(L^*_{M_2}, L_{M_2})\subset E_M$的充要条件是：对于任意的$a>0$，存在$\beta$，$u_0>0$ 使 $M(auv)\le\beta M_1(u)M_2(v)$，$(u, v\ge u_0)$

（ii）$(L^*_{M_1}, L_{M_1}, E_{M_1})\otimes E_{M_2}\subset E_M$的充要条件是：对于任给的$a>0$，存在$\delta>0$和$u_0>0$，使$M(auv)\le M_1(\delta u)M_2(\delta v)$，$(u, v\ge u_0)$。

命题3　$L_{M_1}\otimes L_{M_2}\subset L_M$的充要条件是：存在$\beta>0$和$u_0>0$，使$M(uv)\le\beta M_1(u)M_2(v)$，$(u, v\ge u_0)$，但是第四个定理即[1]定理1.4（也见[2]p98的定理3.6）是不能轻易移植的，即以下命题4不真：

命题4　$T_{M_1}(G)\otimes T_{M_2}(F)$ 在$L^*_M(G\times F)$内具有等度绝对连续范数的充要条件是：对任意的$a>0$，存在$u_0>0$，使

$$M(auv)\le M_1(u)M_2(v),\qquad (u, v\ge u_0)\tag{1}$$

这里G和F分别是两个有限维欧氏空间中的有界闭集，$T_{M_1}(G)$和$T_{M_2}(F)$分别表示两个Orlicz空间$L^*_{M_1}(G)$和$L^*_{M_2}(F)$的单位球。本文符号均同[2]，只有一点非本质区别：G和F不必相同。

例1　设$M(u)=M_1(u)=\dfrac{|u|^2}{2}$，$M_2(u)=\dfrac{|u|^2}{3}$，$G=F=[0, 1]$，显然，对任给$a>0$，只须取$u_0=3a^2$，$M_1(u)$，$M_2(u)$和$M(u)$就能满足（1）。但$T_{M_1}(G)\otimes T_{M_2}(F)$在$L^*_M(G\times F)$内不具有等度的绝对连续范数。

事实上，取$G_n=[0, \frac{1}{n}]\subset G$，$E_n=G_n\times F_n=[0, \frac{1}{n}]\times[0, 1]\subset G\times F$，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{mes}E_n=0$。考察两个函数列

* 1983年7月14日收到.

$$u_n(x)=\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\chi_{G_n}(x),\quad v_n(y)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\chi_{F_n}(y)。$$

其中$\chi_{G_n}(x)$和$\chi_{F_n}(y)$分别表示集合G_n和F_n的特征函数。注意$N(v)=N_1(v)=\frac{|v|^2}{2}$，$N_2(v)=\frac{2}{3}|v|^{\frac{3}{2}}$，$N_1^{-1}(v)=(2v)^{\frac{1}{2}}$，$N_2^{-1}(v)=(\frac{3}{2}v)^{\frac{2}{3}}$ $(v>0)$。我们有

$$\|u_n(x)\|_{M_1}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{mes}G_n\cdot N_1^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{mes}G_n}\right)=1,$$

$$\|v_n(y)\|_{M_2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\mathrm{mes}F\cdot N_2^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{mes}F}\right)=1。$$

或者$u_n(x)\in T_{M_1}(G)$，$u_n(y)\in T_{M_2}(F)$，$(n=1,2,\cdots)$。另一方面，

$$\rho\left(\frac{u_n(x)v_n(y)\chi_{E_n}(x,y)}{\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}}};\widehat{M}\right)=\int_0^1\left(\int_0^{\frac{1}{n}}n\,dx\right)dy=1.\qquad\rho$$

从而

$$\|u_n(x)v_n(y)\chi_{E_n}(x,y)\|_{\widehat{M}}\geq\|u_n(x)v_n(y)\chi_{E_n}(x,y)\|_{(\widehat{M})}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}>0.$$

§2 亚绝对连续范数

我们引进如下的定义，作为改造§1中有问题的命题4的第一种尝试.

定义1 设$w(x,y)\in L_M^*(G\times F)$，若对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要$e_1\subset G$，$e_2\subset F$，$\mathrm{mes}e_1<\delta$，$\mathrm{mes}e_2<\delta$，就有

$$\|w(x,y)\chi_{e_1\times e_2}(x,y)\|_{\widehat{M}}<\varepsilon.$$

我们称函数$w(x,y)$具有"亚绝对连续范数".

定理1 $T_{M_1}(G)\otimes T_{M_2}(F)$在$L_M^*(G\times F)$内具有等度亚绝对连续范数的充要条件是：对于任意给定的$a>0$，存在$u_0>0$，使

$$M(auv)\leq M_1(u)M_2(v),\quad(u,v\geq u_0)\tag{1}$$

证明 **必要性** 设(1)不满足，这时存在$a_0>0$和$a_n\uparrow\infty$，$b_n\uparrow\infty$，使

$$M(a_0a_nb_n)>M_1(a_n)M_2(b_n),\quad(n=1,2,\cdots).\tag{2}$$

或者，由$v<N^{-1}(v)M^{-1}(v)\leq 2v$，$(v>0)$，有与上式等价的

$$N\left[\frac{M_1(a_n)M_2(b_n)}{a_0a_nb_n}\right]<M_1(a_n)M_2(b_n)\tag{2'}$$

不妨设$M_1(a_1)\mathrm{mes}G\geq 1$，$M_2(b_1)\mathrm{mes}F\geq 1$．作$G_n\subset G$和$F_n\subset F$，使

$$\mathrm{mes}G_n=\frac{1}{M_1(a_n)},\quad\mathrm{mes}F_n=\frac{1}{M_2(b_n)}\tag{3}$$

我们有$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{mes}G_n=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{mes}F_n=0$．考察函数列

$$u_n(x)=\frac{a_n}{2}\chi_{G_n}(x),\quad v_n(y)=\frac{b_n}{2}\chi_{F_n}(y),\quad(n=1,2,\cdots).$$

显然$\|u_n(x)\|_{(M_1)}=\|v_n(y)\|_{(M_2)}=\frac{1}{2}$，或者有$\|u_n(x)\|_{M_1}\leq 1$，$\|v_n(y)\|_{M_2}\leq 1$.

即$u_n(x)\in T_{M_1}(G)$，$v_n(y)\in T_{M_2}(F)$．作函数列

$$g_n(x,\ y)=\frac{M_1(a_n)M_2(b_n)}{a_0a_nb_n}\cdot\chi_{G_n\times F_n}(x,\ y)\ .$$

由（2′）和（3），

$$\rho(g_n(x,\ y);\ N)=\iint\limits_{G_n\times F_n}N\left[\frac{M_1(a_n)M_2(b_n)}{a_0a_0b_n}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\iiint\limits_{G_n\times F_n}M_1(a_n)M_2(b_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\ .$$

因此，

$$\|u_n(x)v_n(y)\chi_{G_n\times F_n}(x,\ y)\|_{\widehat{M}}\geq\iint\limits_{G\times F}u_n(x)v_n(y)\chi_{G_n\times F_n}(x,y)\cdot g_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4a_0}>0$$

这表示$T_{M_1}(G)\otimes T_{M_2}(F)$在$L_M^*(G\times F)$内不具有等度的亚绝对连续范数。

充分性 设（1）满足，对于任意给定的$\varepsilon>0$，这时存在$u_0>0$，使

$$M(\frac{5}{\varepsilon}uv)\leq M_1(u)M_2(v),\qquad (u,\ v\geq u_0)。\qquad (4)$$

取

$$\delta=\delta(\varepsilon)=\min\left(\frac{1}{\sqrt{M(\frac{5}{\varepsilon}u_0^2)}},\ \frac{1}{M_1(u_0)},\ \frac{1}{M_2(u_0)}\right),\qquad (5)$$

则当$e_1\subset G$，$e_2\subset F$且$\mathrm{mes}e_1<\delta$，$\mathrm{mes}e_2<\delta$时，对任何$u(x)\in T_{M_1}(G)$和$v(y)\in T_{M_2}(F)$，一致地有

$$\|u(x)v(y)\chi_{e_1\times e_2}(x,\ y)\|_{\widehat{M}}<\varepsilon\ .$$

事实上，若记$e_1^{(1)}=\{x\in e_1;\ |u(x)|<u_0\}$，$e_1^{(2)}=e_1\setminus e_1^{(1)}$；$e_2^{(1)}=\{x\in e_2;\ |v(y)|<u_0\}$，$e_2^{(2)}=e_2\setminus e_2^{(1)}$．由（4）和（5），并注意[2]（Ⅱ）引理1.2，我们有

$$\|\frac{5}{\varepsilon}u(x)v(y)\chi_{e_1\times e_2}(x,\ y)\|_{\widehat{M}}\leq 1+\rho\left(\frac{5}{\varepsilon}u(x)v(y)\chi_{e_1\times e_2}(x,\ y);\ \widehat{M}\right)$$

$$=1+\left(\iint\limits_{e_1^{(1)}\times e_2^{(1)}}+\iint\limits_{e_1^{(1)}\times e_2^{(2)}}+\iint\limits_{e_1^{(2)}\times e_2^{(1)}}+\iint\limits_{e_1^{(2)}\times e_2^{(2)}}\right)M\left[\frac{5}{\varepsilon}u(x)v(y)\chi_{e_1\times e_2}(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leq 1+M\left(\frac{5}{\varepsilon}u_p^2\right)\mathrm{mes}(e_1^{(1)}\times e_2^{(1)})+M_1(u_0)\mathrm{mes}e_1^{(1)}\int_{e_2^{(2)}}M_2[v(y)]\mathrm{d}y+M_2(u_0)\mathrm{mes}e_2^{(1)}$$

$$\int_{e_1^{(2)}}M_1[u(x)]\mathrm{d}x+\left(\int_{e_1^{(2)}}M_1[u(x)]\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{e_2^{(2)}}M_2[v(y)]\mathrm{d}y\right)<5\ .$$

从而获得（6）．

定理证毕．

〔注〕 对于例1中的$M_1(u)$，$M_2(u)$和$M(u)$，由定理1可知，$T_{M_1}(G)\otimes T_{M_2}(F)$在$L_M^*(G\times F)$内具有等度的亚绝对连续范数．

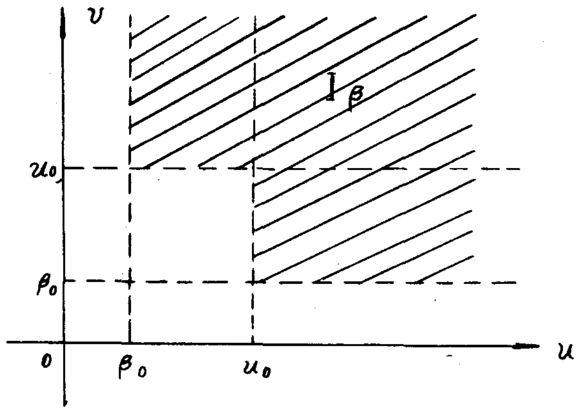
§3 主要结果

我们现在从另一角度改造§1中的命题4．即加强条件（1），获得如下的

定理2 $T_{M_1}(G)\otimes T_{M_2}(F)$在$L_M^*(G\times F)$内具有等度的绝对连续范数的充要条件是：对于任意给定的$\alpha<\infty$和$\beta>0$，存在$u_0>0$，使

$$M(\alpha uv)\leq M_1(u)M_2(v),\quad (u,\ v)\in I_\beta\ .\qquad (7)$$

其中$I_\beta=\{[u_0,\infty)\times[\beta,\infty)\}\cup\{[\beta,\infty)\times[u_0,\infty)\}$如图所示



证明　充分性　设$\forall a<\infty$和$\beta>0$，存在$u_0>0$，当$(u,v)\in I_\beta$时，满足不等式（7）.

第一步　我们要证明，存在常数K，使对任何$u(x)\in T_{M_1}(G)$，$v(y)\in T_{M_2}(F)$，有

$$\|u(x)\chi_F(y)\|_{\hat{M}}<K,$$
$$\|v(y)\chi_G(x)\|_{\hat{M}}<K. \qquad (8)$$

事实上，特取$a=1$，$\beta=1$，这时存在$u_1>0$，满足（7）. 因此，

$$\|u(x)\chi_F(y)\|_{\hat{M}}\le 1+\iint_{G\times F}M[u(x)\chi_F(y)]dydy=1+\text{mesF}\cdot\int_G M[u(x)]dx$$
$$=1+\text{mesF}\left(\int_{G\{(u(x))<u_1\}}+\int_{G\{|u(x)|\ge u_1\}}\right)M[u(x)\cdot 1]dx$$
$$\le 1+\text{mesF}[M(u_1)\text{mesG}+M_2(1)\int_{G\{|u(x)|\ge u_1\}}M_1[u(x)]dx]$$
$$\le 1+\text{mesF}[M(u_1)\text{mesG}+M_2(1)].$$

同理，

$\|v(y)\chi_G(x)\|_{\hat{M}}\le 1+\text{mesG}[M(u_1)\text{mesF}+M_1(1)]$. 取$K$是大于以上两式右端之常数，就得到（8）.

第二步　设$\varepsilon>0$给定，对于$a=\frac{5}{\varepsilon}$和$\beta=\frac{\varepsilon}{5k}$，存在$u_0>0$，它们满足（7），其中$K$是满足(7)的常数，不妨设$u_0>\beta$，取

$$\delta=\frac{1}{M\left(\frac{5}{\varepsilon}u_0^2\right)} \qquad (9)$$

则对于一切$u(x)\in T_{M_1}(G)$，$v(y)\in T_{M_2}(F)$和$E\subset G\times F$，只要$\text{mesE}<\delta$，就有

$$\|u(x)v(y)\chi_E(x,y)\|_{\hat{M}}<\varepsilon. \qquad (10)$$

事实上，若记$E_1=\{(x,y)\in E;\ |u(x)|<u_0,\ |v(y)|<u_0\}$，$E_2=\{(x,y)\in E;\ |u(x)|\ge u_0,\ |v(y)|<\beta\}$，$E_3=\{(x,y)\in E;\ |u(x)|<\beta;\ |v(y)|\ge u_0\}$，$E_4=E\setminus(E_1\cup E_2\cup E_3)$.

由（7）、（8）、（9）和[2]（Ⅱ）引理1.2，我们有

$$\left\|\frac{5}{\varepsilon}u(x)v(y)\chi_E(x,y)\right\|_{\hat{M}}\le 1+\iint_E M\left[\frac{5u(x)v(y)}{\varepsilon}\right]dxdy$$

$$=1+\left(\iint_{E_1}+\iint_{E_2}+\iint_{E_3}+\iint_{E_4}\right)M\left[\frac{5u(x)v(y)}{\varepsilon}\right]dxdy$$

$$\le 1+M\left(\frac{5}{\varepsilon}u_0^2\right)\text{mesE}_1+\iint_{E_2}M\left[\frac{5}{\varepsilon}u(x)\cdot\frac{\varepsilon}{5k}\right]dxdy+\iint_{E_3}M\left[\frac{5}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{5k}v(y)\right]dxdy$$

$$+\iint_{E_4} M_1[u(x)]M_2[v(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le 1 + M\left(\frac{5}{\varepsilon}u_0^2\right)\mathrm{mes}E + \iint_{G\times F} M\left[\frac{u(x)\chi_F(y)}{K}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{G\times F} M\left[\frac{v(y)\chi_G(x)}{K}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_G M_1[u(x)]\mathrm{d}x \cdot \int_F M_2[v(y)]\mathrm{d}y < 5 .$$

从而获得（10）.

必要性 若所设条件不满足，即以下两者之一成立.

（i）存在$a_0>0$和$\beta_0>0$，对于这两个数有$a_n\nearrow\infty$和$b_n\ge\beta_0$，使

$$M(a_0a_nb_n) > M_1(a_n)M_2(b_n), \quad (n=1,2,\cdots). \tag{11}$$

（ii）存在$a_0'>0$和$\beta_0'>0$，对于这两个数，有$a_n'\ge\beta_0'$和$b_n'\nearrow\infty$，使$M(a_0'a_n'b_n')>M_1(a_n')M_2(b_n')$，（$n=1.2.\cdots$）. 不妨设（i）成立，还可设$M_1(a_1)\mathrm{mes}G\ge 1$. 取$y_0\ge\beta_0$，使$M_2(y_0)\mathrm{mes}F\ge 1$，并设$\xi_n=\mathrm{Max}(y_0, b_n)$. $n=1,2,\cdots$作可测子集$G_n\subset G$和$F_n\subset F$，使

$$\mathrm{mes}G_n=\frac{1}{M_1(a_n)}, \quad \mathrm{mes}F_n=\frac{1}{M_2(\xi_n)} \quad (n=1,2,\cdots) \tag{12}$$

考察函数列

$$u_n(x)=\frac{1}{2}a_n\chi_{G_n}(x), \quad v_n(y)=\frac{1}{2}b_n\chi_{F_n}(y).$$

由（12）和$b_n\le\xi_n$可知：

$\|u_n(x)\|_{M_1}\le 2\|u_n\|_{(M_1)}=1$，$\|v_n(y)\|_{M_2}\le\|\frac{1}{2}\xi_n\chi_{F_n}(y)\|_{M_2}\le 1$. 即$u_n(x)\in T_{M_1}(G)$，$v_n(y)\in T_{M_2}(F)$.

另一方面，由（11）和（12），我们有

$$\rho(4a_0u_n(x)v_n(y)\chi_{G_n\times F_n}(x,y);\widehat{M}) = \iint_{G_n\times F_n} M(a_0a_nb_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}y >$$

$$\iint_{G_n\times F_n} M_1(a_n)M_2(b_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{M_2(b_n)}{M_2(\xi_n)} = \begin{cases} 1 & \text{当}y_0\le b_n \\ \dfrac{M_2(\beta_0)}{M_2^2(y_0)} & \text{当}y_0>b_n \end{cases} \ge \frac{M_2(\beta_0)}{M_2(y_0)} \quad (n=1,2,\cdots)$$

注意到$\dfrac{M_2(\beta_0)}{M_2(y_0)}\le 1$和凸函数的性质，由上式可知

$$\rho\left(4a_0\frac{M_2(y_0)}{M_2(\beta_0)}u_n(x)v_n(y)\chi_{G_n\times F_n}(x,y);\widehat{M}\right)$$

$$\ge\frac{M_2(y_0)}{M_2(\beta_0)}\rho(4a_0u_n(x)v_n(y)\chi_{G_n\times F_n}(x,y);\widehat{M}) > 1 .$$

最后得到

$$\|u_n(x)v_n(y)\chi_{G_n\times F_n}(x,y)\|_{\widehat{M}} \ge \|u_n(x)v_n(y)\chi_{G_n\times F_n}(x,y)\|_{(\widehat{M})} \ge \frac{M_2(\beta_0)}{4a_0M_2(y_0)} > 0 .$$

但是，$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{mes}(G_n\times F_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{mes}G_n\cdot\mathrm{mes}F_n)\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{M_1(a_n)M_2(\beta_0)}=0$.

这表示$T_{M_1}(G)\otimes T_{M_2}(F)$在$L_M^*(G\times F)$内不具有等度的绝对连续范数. 定理证毕.

满足条件（7）的N－函数$M_1(u)$，$M_2(u)$和$M(u)$是存在的. 因为我们有如下的

例 2 设$M_1(u)=M_2(u)=\frac{|u|^3}{3}$，$M(u)=\frac{|u|^2}{2}$．则$\forall a_0>0$和$\beta_0>0$，只须令$u_0=\frac{9a_0^2}{2\beta_0}$，$M_1(u)$，$M_2(u)$和$M(u)$就满足（7）．于是由定理2可知$T_{M_1}(G)\otimes T_{M_2}(F)$在$L_M^*(G\times F)$内具有等度的绝对连续范数．

承任重道老师和王廷辅先生指导，谨致谢意．

参 考 文 献

〔1〕王声望，关于Orlicz空间的乘积问题，数学进展，Vol．7，No．3，1963．

〔2〕吴从炘、王廷辅，奥尔里奇空间及其应用，黑龙江科技出版社，1983．

On $\otimes$-product of Orlicz Spaces

Xiao YueLong and *Zhou Aihui*

Abstract

Let $T_{M_1}(G)$. $T_{M_2}(F)$ be the unite sphere of $L_{M_1}^*(G)$ and $L_{M_2}^*(F)$. respectively. In this paper we obtain the following theorem.

Theorem In order that the set $T_{M_1}(G)\otimes T_{M_2}(F)$ has uniformly continuous norm in $L_M^*(G\times F)$, it is necessary and sufficient that for every $a>0$ and $\beta>0$. there exists $u_0>0$ such that

$$M(auv)\leq M_1(u)M_2(v), \text{ for all } (u, v)\in I_\beta$$

where $I_\beta=\{[\beta, \infty)\times[u_0,\infty)\}\cup\{[u_0,\infty)\times[\beta, \infty)\}$

Thus we have solved the problem stated in [1].