

## 我国数学发展的特点 \*

梁宗巨

(辽宁师范大学数学系)

我国数学是独立发展起来的，中间也有过停滞，但基本上是连绵不断的。在这样广大的地区有这样长久的数学历史，在世界上是绝无仅有的。

和其他的文明古国比较：巴比伦曾是世界的数学中心，但公元前2世纪完全变成废墟。埃及在金字塔时代就掌握了一定的数学知识，但到公元前525年即被波斯征服。希腊数学兴盛了一千多年，到公元461年完全中断。中亚细亚地区（阿拉伯文化）数学的繁荣也只有四、五百年（8到13世纪）的历史。中美洲墨西哥东部尤卡坦（Yucatan）半岛有过一段光辉灿烂的玛雅（Maya）文化，到公元800年完全毁灭。印度在历史上屡受外族侵略，实际上是一种混合文化。这些文明古国的历史都没有中国那么悠久。

中国数学的发展有许多不同于西方的特点。总的说来，我国古代有过辉煌的成就，这是值得我们自豪的。但是元朝中叶以后，便开始落后于西方。探索其原因，从中总结经验教训、掌握发展规律，这在当前是有重大现实意义的。本文试就四个方面来分析一下这些特点。

### I、以算为中心的筹算、珠算制度

我国盛产竹子，世界上没有任何一个国家象中国那样善于利用竹子。从写字的毛笔和竹简、吃饭的筷子到各式各样的生活用具都可以用竹子来制造，甚至交通工具（竹筏、轿子、竹索桥）和住房（如南方的竹楼）也都用上了竹子。竹笋还是餐桌上的佳品。因此有人把中国文化称为竹子文化。

竹子和数学居然也发生了密切的关系。早期的计算工具，通常是取最易得到的东西。西方人用石子（拉丁文是calculus，它的含义后来引申为“计算”，以后又变成“微积分”）或木钉，玛雅人用石子、小棒和贝壳，中国人则用竹筹。筹、筹、策这些竹字头的字，指的是同一种东西，是用竹子做的计算工具。后来也有用其他质料如骨、玉、金属来制造的。1971年在陕西千阳县出土的西汉算筹，以及1980年初在石家庄出土的东汉算筹都是骨制的。从开始的粗糙竹制算筹到后来骨玉算筹，中间已经经过很长的岁月。算筹大概在战国初期（公元前5世纪）就已出现，至迟到公元前2、3世纪，算筹的运用已达到相当纯熟的地步。

筹算制度到明朝演变为珠算。筹算和珠算支配我国数学两千多年，给我国数学带来几个明显的特点。

#### (1) 十进位值制记数法

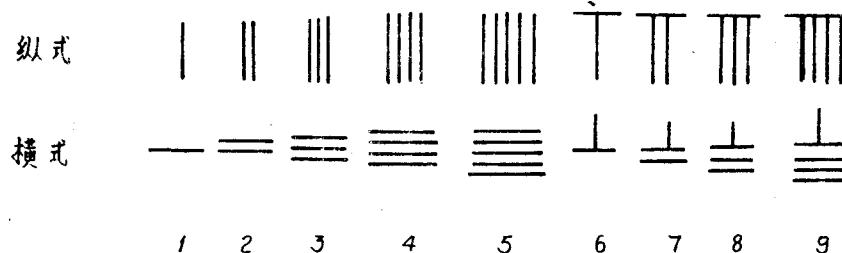
世界各国的记数法，可以分为两类。一类是位值(place value)制，一类是非位值制。前者以世界通用的阿拉伯数码为代表，后者以罗马数码为代表。所谓位值制，是一个数码表示什么数，要看它所在的位置来决定。如23和32，使用两个相同的数码，23中的2放在十位上，表示20，32中的2放在个位上就表示2。用十进位值制记数法，1, 2, 3, …, 9, 0十个数码就可以将任何数表示出来。非位值制记数法却不是这样，每一个较高的单位是用特殊的符号来表示的。以罗马数码为例，用I、V、X、L、C、D、M分别表示1、5、10、50、100、500、1000，这样，388就要写成

M M M D C C C L X X X V I I .

这种笨拙的记数法12世纪以前盛行于欧洲，那时，做加减法就已相当困难，会乘除法就可以称为专家了。至于分数，那简直是难于上青天。直到现在，德文里还保留着这样的谚语，形容一个人已经陷入绝境，束手待毙，就说他已“掉到分数里去了”(in die Brüche fallen)。

我国用算筹记数，十进位值制思想非常明确。记数有纵横两种方式。

\* 1981年6月22日收到。



记数时，个位常用纵式，其余纵横相间。例如6728表示作上口—III。6708表示作上口—III，空一格的地方表示零。个位是零也能表示出来，如6720表示作上口—。由于各位数字纵横相间，所以不致看错。位值制的关键是零号，没有表示零的方法，位值制就不完备。巴比伦人位值制的思想起源很早，但用的是60进制。早期由于缺乏零号，位值制并不是很明确的。玛雅人用的是20进制，零号的出现已在公元前前后。印度人在6世纪末才明确地使用十进位值制，876年前后才有现在的零号。这一项重大的发明，在算筹记数法中却轻而易举地得到。

我国古书缺字常用□来表示，数字间的空位，自然也可以用□来表示。字体写成行书或草书，方块就改变成圆圈了。有人以为○号是从印度传来的，这是没有根据的。我国零号的演变过程十分清楚，而且写法和阿拉伯数码的扁圆○也不同。总之，使用位值制而又是十进的，世界上以中国为最早。

#### (2) 四则运算及开方法

有了方便的位值制记数法，简捷的四则运算就不难得到。为了加快演算速度，我国还广泛使用口诀。汉语一字一音，便于编成容易背诵的口诀。有了一套口诀，筹算或珠算就如虎添翼，充分发挥它的巨大作用。这也是我国数学最显著的特色之一。西方也出现过某种算盘（如罗马），但后来逐渐被淘汰，而中国算盘却有无限的生命力，一直盛行至今（日本算盘也是中国传过去的）。原因之一是和口诀配合，于是能运算如飞。

最流行和最基本的口诀是“九九”（俗称“小九九”），就是乘法口诀。这最晚在春秋齐桓公时代（公元前7世纪）已经通行。此外还有多种筹算珠算的歌诀。许多应用题的运算法则，也常常用歌诀的形式来帮助记忆。如解某种不定方程（所谓“孙子定理”或“大衍求一术”，西方叫做 Chinese remainder theorem），就有著名的口诀：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，  
七子团圆正半月，除百令五便得知。

在简捷的四则运算的基础上，又出现了开平方、开立方的法则。这在《九章算术》（约公元前一世纪）第4章《少广》中已有完整的记述。希腊直到4世纪末，亚历山大的西翁（Theon）才给出几个开平方的例子。在希腊著作中始终没有出现开立方的法则。印度到公元500年左右才有阿利耶毗陀（Āryabhata）给出开平方的法则。

#### (3) 分 数

我国自古以来就非常注重历法。每一年的月数，每个月的日数都不是整数，要制定优良的历法，不可避免要遇到分数的计算。我国用算筹来计算，很早就有了一套完整的分数算法。

算筹除法，将“实”（被除数）列在中间，“法”（除数）在下面，“商”在上面。除到最后，中间的实可能还有余数，就“以法为母，实余为子”（见《孙子算经》）。就是以除数为分母，被除数的余数为分子，构成一个分数。在《九章算术》中，系统地叙述了分数的各种运算法则，有“约分”、“合分”、“加”、“减分”（减）、“乘分”（乘）、“经分”（除）、“课分”（比较分数大小）、“平分”（求平均值）等，大体上已和现在的分数算法一致。

三千多年前，埃及纸草书虽然已有分数，但把所有的分数都化为单分子分数，这使得计算非常复杂。巴比伦人用60进分数，运算也很麻烦。欧几里得《几何原本》中提到分数，但没有给出运算方法。欧洲到15世纪以后才逐渐有现代分数算法。总之，我国《九章算术》是世界上最早记述分数的著作，比欧洲大约早1400年。

#### (4) 方程的解法

有了一整套简捷的运算方法，就有可能对某些具体问题建立优良的解法。事实上确实是这样，我国在线性方程组及一元高次方程的解法方面是遥遥领先的。《九章算术》第8章《方程》给出线性方程组的完整解法，和现在的消元法实质一样。并破天荒地引入了负数，这是世界数学史上一大光辉成就。

欧洲直到1559年法国的彪特（Buteo）才开始使用不甚完整的加减消元法解线性方程组，那时尚未认识负数，这已在《九章算术》之后一千多年了！至于线性方程组的完整解法，到17世纪末莱布尼兹（Leibniz）才着手拟定，

由此导致行列式的发明（1693）。

我国还有许许多多的创造，例如刘徽的割圆术，祖冲之的圆周率，刘焯、一行的插值法，贾宪的“开方作法本源”（二项系数）等等，但最突出的还是13世纪的高次方程解法。

宋、元（前半期）两代是我国数学的全盛时期。秦九韶（1247）、李治（1248）、杨辉（1261）、朱世杰（1303）等人在代数方程论方面作出了巨大的贡献。秦九韶给出高次方程的数值解法，和西方盛称的“霍纳法”完全相同。霍纳（Horner）是1819年发表他的方法的，实际上较早（1804）的鲁非尼（Ruffini）已得到这种方法。不论是霍纳或鲁非尼，都比秦九韶晚了五百多年。

朱世杰进一步建立了四元高次方程理论。用天、地、人、物来表示四个未知数，相当于现在的 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $t$ 。

欧洲正式讨论多元高次方程组已到18世纪，由探索高次代数曲线 $f(x, y) = 0$ ,  $g(x, y) = 0$  的交点数而引起1764年培祖（Bézout）提出解法，已在朱世杰之后四、五百年。

综上所述，筹算和珠算制度使中国数学具有以算为主的特点。“算学”这个名称比“数学”更能贴切地反映我国古代数学的基本性质。过去算学与数学这两个词是并行的，1935年以后才统一用“数学”而不用“算学”。

14世纪以前，我国数学在计算方面（主要是算术、代数）一直居于领先地位，后来却落后于西方。原因很复杂，和筹算制度也有密切关系。

## II、筹算、珠算的局限性

### （1）没有完成向符号代数的转化。

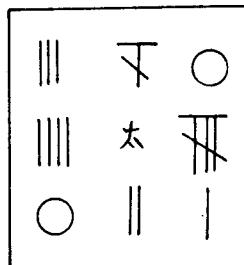
使用符号，是数学史上的一件大事。一套合适的符号，决不仅仅是起到速记和节省时间的作用。它能够精确、深刻地表达某种概念、方法和逻辑关系。一个较复杂的公式，如果不用符号而用日常语言来叙述，往往十分冗长并且含混不清。符号即使仅仅起到速记的作用，也是值得重视的。牛车和火车、汽车比较，也只是速度不同，但不通火车、汽车的地方，文化就必然落后。因为量的积累会引起质的变化。现在大概不会有人怀疑符号的重要性。今天在数学中使用各式各样的符号，都是在悠久的岁月中经过不断改良、选择和淘汰的结果。设想在数学中取消一切符号，近代数学将是寸步难行的。

数学史家内塞尔曼（Nesselmann, 1842）根据符号使用的情况，将代数学分为三类：（1）文词代数（Rhetorical algebras），完全用文字来叙述而不用符号；（2）简字代数（Syncopated algebras）；（3）符号代数（Symbolic algebras）。除了个别地方，一切全用符号表示。我国的筹算数学，单从筹码的布列来看，很象第三类，但从术文来看，只能归入第一类。实际上都不恰当，应该另立一类，叫做算器代数（Instrumental algebras）。

在西方数学输入（明末）之前，我国基本上没有使用符号。宋、元数学家用天、地、人、物代表未知数，有引入符号的苗头，但始终没有向符号代数过渡。

筹算只能表示整数与分数，算盘连表示分数都有困难，更不用说无理数了。各种运算也只能借助文字来叙述，用筹算无法表示的。我国甚至没有土生土长的符号，这对数学进一步的发展是不利的。近代代数学的特点之一，是用文字（字母）来代表数，比方说一般的二次方程，可以写成 $ax^2 + bx + c = 0$ ，而用筹算表示是不能表示的。这大大妨碍了对一般性问题的讨论。秦九韶尽管解了一个10次方程，但没有研究一般的 $n$ 次方程。

朱世杰用天、地、人、物来表示四个未知数，其系数分别放在“太”的下方、左方、右方和上方，例如



表示 $2x + 4y - 8z - 6t + 3yt + xt$

上、下、左、右四个方位，只能放四个未知数，如未知数有五个，就无法安排，更不用说推广到 $n$ 个了。因此这种方法是有局限性的。

筹算数学发展到13世纪，已经到达它的顶峰，再向前迈进，必须突破筹算的框框，向符号代数转化。由于下面还要谈到的种种原因，这一步没有完成。

筹算和珠算后来传到了日本，17世纪时，以关孝和（1642—1708）为代表的日本数学家开始向符号代数过渡，逐步完成了这一伟大的变革。而中国从14世纪起停滞了三百年，错过了向符号代数转化的时机。

### （2）不易发现量与量之间的关系，难于掌握一般规律。

在筹算和珠算的运算过程中，参与运算的数字随着运算的进行而消失，中间出现的数字没有保留下来，最后只看到运算的结果。每一步骤是否有错，很难查出。现代数学用符号和式子表示各种数量，彼此间的关系一目了然。更重要的是容易发现新的规律。

总而言之，筹算与珠算的特长是数值计算。我国在13世纪以前充分发挥了它的优越性，在计算方面取得了光辉的成就。数学进一步发展，要求更高的抽象化和符号化，筹算和珠算就显露出它的弱点。

## III、没有形成一个严密的演绎体系

有些外国学者认为中国数学没有逻辑证明，这是偏激的看法。我国古书中许多命题、方法没有说明来源或给出证明，有种种原因。我国历来没有保护个人发明权的专利制度。科学发明有时要对外保密。在医学上，“祖传秘方”成为一种风气。不知多少宝贵的经验，就这样失传了。后人还要花费很多精力去作重复劳动。在著述上，往往故弄玄虚，使人莫测高深。创作者本人是知道证明的，但故意秘而不宣，至少是有所保留。这是古书中看不到证明的主要原因之一。也是学术失传的重要原因。

我国古代数学有逻辑证明，这是可以肯定的。所谓证明，无非就是借助一些真实性业经确定的命题来论证某一命题真实性的思想过程。例如《九章算术》指出三角形面积的算法：“术曰：半广（底）以乘正从（高）”。刘徽注（公元263左右）：“半广者，以盈补虚，为直田也”。意思是三角形经过割补，可以拼凑成一个矩形，从而推得三角形面积等于底乘高之半。这个注就是证明。

赵君卿（约3世纪）给《周髀算经》的“弦图”作注，也是用割补法证明了勾股定理。这种例子很多。

当然，并不是每一个命题都是严格推导的结果。如《九章算术》《方田》中“弓形田”（弓形）面积的近似公式，就没有仔细论证。它的误差是这样大，简直可以说是一个错误的公式。

已知圆弓形的底 $b$ ，高 $h$ ，《九章算术》认为面积是

$$S = \frac{1}{2}(bh + h^2)$$

设 $h = 1$ ,  $b = 10$ , 按这公式算得 $S = 5.5$ , 实际是 $6.7197$ , 相对误差超过 $18\%$ , 如 $h = 1$ ,  $b = 20$ , 误差超过 $21\%$ 。这公式后来传到印度去，出现在摩诃毗罗（约850年）的书中。

中国古代数学虽然有证明，但是始终没有建立起一个严密的演绎体系。逻辑证明在数学中的重要意义，今天已无人否认。首先它能够保证命题的正确性，使理论立于不败之地。其次是使命题具有充分的说服力，令人深信不疑。更重要的是它揭露了各定理之间的内在联系，使数学构成一个有机的整体，便于流传，并为进一步发展打下坚实的基础。

当一门数学形成了逻辑的演绎体系之后，便具有更强大的生命力。正象仅有砖瓦木材还不能称为房子一样，只有将零散的命题和公式用逻辑方法组织起来，才能建成瑰丽的数学大厦。

从几个基本命题（公理）出发，推导出尽可能多的定理，这就是演绎体系。演绎体系的形成，一方面是已有理论的总结，同时又是进一步研究的推动力。这时整个体系对于生产实践和社会需要具有相对的独立性，有时不是生产的推动而是为了解决内在的矛盾产生新的理论。

我国虽然也有类似公理的命题，例如“幂势既同，则积不容异”（底和同高处的截面积相等，则体积相等）的“祖氏公理”，但没有形成以公理为基础的逻辑演绎体系，这对数学发展是不利的。

我国的数学理论，多半是由于解决某些实际问题而引起。例如历法就一直和数学有着不可分割的关系。分数算法、勾股定理和测量术、不定方程或大衍求一术和内插法等等都直接起源于天文历法。面积的计算由田亩测量的需要而引起，立体体积的计算公式是筑城、建堤、挖沟、修渠等工程丰富经验的总结和加工。各种方法常常是就事论事，理论与理论之间缺乏紧密的联系。一旦生产实践和社会需要减弱，学术就有中断或散失的危险。

我们相信，自古以来失传的数学比流传下来的要多得多。有些只知道名目，有些连名目也不知道。汉唐千余年间数学著作有记载的至少有数十部，留下来的不到十部。刘徽时代，已不知道古代的“重差术”是什么，只好作一些猜测，重新研究。《数术记遗》（6世纪）中所提到的算法实际上均已失传。宋、元的天元术到明、清已无人通晓。若不是梅毅成重新发现，这些古代的学术财富也就随着时间的消逝而泯灭。损失最大的，恐怕是祖冲

之的《缀术》，除了在别的书有片断的记载外，其他内容均无所知。是否还有比《缀术》更重要的著作失传，现在很难断定。当然，学术的失传还有许多其他的原因，如上述没有保护发明权的专利制度等等。不管怎样，缺乏紧密联系的知识总比有组织有系统的知识容易散失得多。

#### IV、数学发展的社会条件

我国在13世纪以前，数学一直是先进的，特别是宋和元初，发展达到高峰。但是朱世杰（1303）以后，突然出现中断的现象。原因何在？这是中外数学史家特别感兴趣的问题。我们试从社会背景这个侧面去作一些解释。

人是社会的动物，人不能离开社会而生存，一切活动包括学术活动都受社会条件的影响。科学的发达，要有一定的条件。首先要有生产上和社会上的需要；其次是要有相当程度的思想和言论自由；此外，统治阶级的科学政策，对整个科学的发展也有重大的影响。

我国春秋战国时代，私学盛行。从孔子的儒家学派开始，形成一个以治学为业的知识阶层。他们在讲学上有很大的自由，以后出现诸子蜂起，百家争鸣的学术繁荣景象。秦始皇焚书坑儒，推行“以吏为师”制度（官府垄断了一切典籍和知识），取缔一切私学，实行愚民政策，这就结束了百家争鸣的局面。

古希腊的文化昌盛，和政治上实行自由民的民主制度有关。公元前4世纪，由于托勒密（Ptolemy，公元前367—285年）王的大力提倡和苦心经营，出现了以亚历山大城为中心的希腊数学兴旺时期。与此相反，公元4世纪罗马帝国的君士坦丁大帝利用宗教作为统治工具，把一切学术都置于基督教神学的控制之下。公元529年东罗马帝国皇帝查士丁尼（Justinian）勒令关闭学校，严禁研究和传播数学。公元641年，亚历山大图书馆被焚，希腊数学完全中断。

这些都是社会条件影响学术研究的著名例子。

我国元朝以后，有许多不利于数学发展的因素，列举如下：

##### （1）知识分子地位的低下

根据郑所南《心史》的记载，元初统治者将人民分为十等：“一官、二吏、三僧、四道、五医、六工、七猎、八民、九儒、十丐”。谢方得《叠山集》的记载略有不同：“……七匠、八娼、九儒、十丐”。于是发出感叹：“嗟乎卑哉，介乎娼之下，丐之上者，今之儒也！”

儒就是当时的读书人即知识分子。将儒列为第九等，仅在丐之上，连娼都不如。对知识分子是这样，对科学当然也不会重视，学术上的停滞也就不足为奇了。

元初为了编制历法，还重用了郭守敬，在他之后，便后继无人了。

##### （2）八股取士制的危害

我国科举考试制度起源于隋朝，到唐太宗（626—649在位）固定下来。以后各代断断续续实行，直到1905年完全废除，前后实行了一千二百多年。唐、宋两代考试科目有明算科（即数学科），在客观上促使知识分子学习数学。入元以后，考试制度废止了35年，直到1314年才重新恢复。值得特别注意的是考试内容以《四书》为准，将数学完全砍去。这对数学是一个致命的打击。科举制度不久又发展为“八股取士制”。知识分子受这种形式死板、内容空洞的八股文体所束缚，摒弃其他一切有用的学术研究。从此以后，数学便很少有人去问。从14世纪初到16世纪末的三百年间，竟没有一本值得称道的数学著作。

##### （3）盲目排外和文化专制的恶果

明末清初发生的杨光先事件，是盲目排外最典型的例子。

明末，历法好几百年没有修改，误差很大，多次预报日月食不准。有见识的人都主张修改历法。我国科学家徐光启（1562—1633）很注意吸取西方的科学技术。他对1610、1629年的日食作了较准确的预报，赢得巨大的声誉。崇祯皇帝命徐光启、汤若望（J. A. S. von Bell, 1591—1666, 德国人）等人一同编修新历法。但不久明亡，新历法暂时搁下。

清初皇帝很重视汤若望等人的新历，决定采用。但以杨光先、吴明恒（恒音xuan）的顽固派拼命反对新法。他们不懂也不愿接受西方先进的科学。杨光先公然宣称：“宁可使中夏（即中国）无好历法，不可使中夏有西洋人”。他多次上书抨击新法，终于制造了一起大冤案。康熙三年（1664，当时康熙皇帝只10岁，由辅政大臣鳌拜掌权），汤若望、南怀仁（F. Verbiest, 1623—1688, 比利时人）等多人被捕。1665年将五个拥护新法的中国官员处斩。汤若望、南怀仁幸免于死。

1668年南怀仁东山再起，弹劾吴明恒推算有误。1669年康熙帝命二十多位大臣到观象台测验，南怀仁所说的都

对，吴明恒每一条都错。结果杨光先、吴明恒被革职，五个无辜被害的官员平了反。

历法的编制和天文学研究本来是学术活动，但因为和帝王的权威联系起来，学术问题便成了政治问题。

杨光先事件对我国数学的打击是严重的。冤案虽然得了昭雪，但学者们仍然心有余悸，不敢大胆发表自己的见解，很少有突破性的创造。

康熙以后，清统治者长期实行闭关锁国政策，断绝中外学术交流。直到鸦片战争，才被大炮打开了大门。历史证明，固步自封、抱残守缺只能使我国的科学更加落后。用行政命令或暴力镇压的办法是解决不了学术问题的。它只会带来百花凋残的严重后果。

清统治者为了进一步控制知识分子的思想，还大兴文字狱，用血腥的屠杀来加强文化专制。一字之差，不仅可以招致丧生，还有灭族之虞。剥夺了思想和言论的自由，当然不会有科学的繁荣。

#### （1）封建主义的流毒

以上种种障碍数学发展的因素，都是在封建制度下产生的。因此科学落后最根本的原因乃是封建主义的流毒。

我国封建主义的特点可以归结为君主专制、官僚机构、宗法特权等几个方面。君主专制就是皇帝一个人拥有至高无上的权力，“金口玉言”，别人只能服从，不能违抗，否则便是大逆不道。中国历代何尝没有法律，但却没有实行法治，因为皇帝凌驾于法律之上。皇帝发布的命令就有诏、敕、谕、诰、旨、册、制等多种，随时可将法律踩在脚下。历史上要纠正皇帝的一个错误往往要付出千百万人生命的代价。

皇帝最大的利益并不是国家的富强、人民的幸福，而是确保皇权皇位不受威胁。皇帝不放心把权力交给有治国才能的大臣，宁可信任宦官、外戚等阿谀逢迎之辈。

中国历史上皇帝关心数学，多半是由于编制历法的需要，而历法向来是帝王权威的体现。真正热心科学、提倡学术自由的皇帝是极少的，大搞文化专制却是封建社会的传统。

官僚机构的特点是等级森严、贪赃枉法、因循守旧、腐败无能。一切都看上司的脸色行事，只要上级信任，就可以肆无忌惮、胡作非为，不受群众监督。这些官僚当然也不会真正关心科学的发展。

宗法特权主要是血统论和世袭制。世袭制在中国实行了几千年，封建君主虽然已被打倒，可是世袭制的思想却远远没有肃清。辛亥革命废除了皇帝，不久袁世凯又当了皇帝。袁世凯打倒后，又闹了一场张勋复辟的丑剧。蒋介石死后传位给儿子，实际还是世袭。可见世袭思想是何等根深蒂固。世袭制危害甚大，历代绝大多数的昏君都是世袭制的产物，而整个国家的命运却寄托在这些人的身上。

西方14到16世纪的文艺复兴和18世纪的启蒙运动带来了科学的繁荣，而中国明、清两代的封建专制发展到了顶峰，造成了科学的衰退。直到1919年五四运动，我国数学发展才迈入一个新的时期。

五四运动提出只有德先生（德谟克拉西，democracy，即民主）和赛先生（赛因斯，science，即科学）才能救中国。要发展科学，必须要有民主，没有民主就没有思想的自由，也就没有科学的昌盛。一切发明创造，一切新思想的萌芽和成长，都需要有学术自由的气氛。有了民主，领导者就要考虑国家的富强，人民的利益，于是就要发展生产，发展科学。在这种情况下，数学就不可能不发达。