一类线性拓扑空间的Klee子集的存在性与空间的无穷维特征*

王　崇　祜

（南　京　大　学）

本文把〔1〕中定理1及其证明所包含的主要结果推广到更一般的线性拓扑空间（〔1〕在赋范线性空间中讨论），讨论了“直线有界集”和“有界集”之间的关系，并且得到某种类型的线性拓扑空间的无穷维特征．最后在l^p（$0<p<1$）空间中构造了一个具体的例子．

定义 1　设X是实数域或复数域K上的线性空间，$A\subset X$．如果对X中任一直线L：$\{x+\lambda y,\ \lambda\in R\}$（$x,\ y\in X,\ y\neq\theta$），$\{\lambda: x+\lambda y\in L\cap A\}$ 都是有界的，则称A是直线有界的．

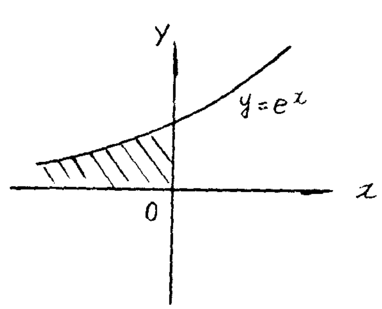
直线有界集A的含义是A与任一直线的交集均包含在有限线段之中．

以下设X是一线性拓扑空间（定义中我们假设其拓扑总满足T_0分离公理，因此也是T_1、T_2、T_3型的）．θ是X中的零元素．X^*表示X上一切连续线性泛函所成的空间，X^*上的弱*拓扑记为w^*．当X^*是完全集时，X上可以借助X^*定义弱拓扑，记为w．众所周知，（X, w）和（X^*, w^*）都是局部凸线性拓扑空间．

定义 2　设X是一线性拓扑空间，$A\subset X$．如A是无界的但是直线有界的，均衡的凸闭集，则称A是X中的Klee子集．

我们知道：在任一线性拓扑空间中，有界集的闭包必是有界的；从一个线性拓扑空间到另一线性拓扑空间的任一连续线性算子必把有界集映为有界集；在局部凸线性拓扑空间中，任一有界集的凸包必是有界的．但是易举反例说明，如把上述这些结论中“有界”换为“直线有界”，则结论一般是不成立的．

仅举一例：令$X=R^2$，$S=\{(x,y)\in R^2:$ $-\infty<x\leq 0,\quad 0<y\leq e^x\}$（如图）



显然S是直线有界的，但S的凸包$\mathrm{Co}(S)$不是直线有界的．

上例也说明直线有界集不必是有界的．但有

引理 1　X中任一有界集A必是直线有界的．

其证可由线性拓扑性质直接推出，从略．

引理 2　设X是可分的，局部有界的，且X^*是完全的，则存在序列$\{f_n\}\subset X^*$，$\{f_n\}$是完全的．

证　对X中θ的任一邻域U，令$A=\{f\in X^*: |f(x)|\leq 1$对一切$x\in U$成立$\}$，则由Banach-Alaoglu定理〔2：17．1．p155〕知，A是弱*紧的．

*1983年6月11日收到．

因X是局部有界空间，故存在θ的一邻域U．U是有界集．特别地θ的这一有界邻域U定义上面的集A，A也是弱*紧的．因X又是可分的，故拓扑空间（A，w^*）是可距离化的〔3；p437〕．且是紧空间．从而（A，w^*）也是可分的．

设$\{f_n\}$是（A，w^*）的稠密子集，则可证$\{f_n\}$是完全的．设若不然，存在$x\in X$，$x\neq\theta$，但对一切n，$f_n(x)=0$．因对固定的x，f变动时，$f(x)$可视为（X^*，w^*）上的连续线性泛函，已知$\{f_n\}$在（A，w^*）中稠密，故对任$f\in A$，均有$f(x)=0$．

因U是X中有界集，故U也是w有界的．而U是w有界的等价于：对任$f\in X^*$，f是U上的有界函数．故对任$f\in X^*$，存在$M>0$，使得$|f(x)|\leq M$，$\forall x\in U$．从而$\frac{1}{M}f$
故$\frac{1}{M}f(x)=0$即$f(x)=0$．这与X^*的完全性相矛盾．因此$\{f_n\}$是完全的．证毕．

定理1　设X是无穷维的、局部有界的、X^*是完全的，则X中必存在Klee子集．

证　不妨假设X是可分的．(否则可在X的一可分闭子空间内构造Klee子集，这一集合在X中仍是Klee子集）

因X是局部有界空间，故存在θ的一有界邻域V．据引理2，存在$\{f_n\}\subset X^*$，$\{f_n\}$是完全的．

现首先在X中作出一无界点列$\{x_n\}$．因$f_1^{-1}(0)$是无穷维的线性子空间，故$f_1^{-1}(0)$是X中的无界集，存在$x_1\in f_1^{-1}(0)$，$x_1\notin V$．

类似地，可取$x_2\in f_1^{-1}(0)\cap f_2^{-1}(0)$，$x_2\notin 2V$．因X是无穷维空间，故对任意自然数$n$，$f_1^{-1}(0)\cap\cdots\cap f_n^{-1}(0)$是无穷维子空间，从而是无界集．因此可取$x_n\in f_1^{-1}(0)\cap\cdots\cap f_n^{-1}(0)$，$x_n\notin nV$ $(n=1,2,\cdots)$．显然$\{x_n\}$是X中的无界集．对这取定的$\{x_n\}$，令$M_1=1$，$M_{n+1}=\max\{|f_{n+1}(x_1)|,|f_{n+1}(x_2)|,\cdots,|f_{n+1}(x_n)|\}$ $(n=1,2,\cdots)$．又令

$A=\bigcap\limits_{n=1}\{x\in X:|f_n(x)|\leq M_n\}$．因$\{x_n\}\subset A$，故A是无界的．显然A也是均衡的，凸的，闭的．现证A是直线有界的．任取x，$y\in X$，$y\neq\theta$，因$\{f_n\}$是完全的，故存在某n_0，使得$f_{n_0}(y)\neq 0$．设$x+\lambda y\in A$，由A的构造知$|f_{n_0}(x+\lambda y)|\leq M_{n_0}$，因而即

$$|\lambda|\leq\frac{1}{|f_{n_0}(y)|}(M_{n_0}(x)|)\ .$$

所以A是直线有界的．证毕*．

可以证明：任一有限维的线性拓扑空间中不存在Klee子集．

引理3　设X是有限维的线性拓扑空间，如A是X中直线有界的均衡闭凸集，则A必是有界集．

证　设$\dim X=n$，则$\dim X^*=n$．因X必与n维欧几里得空间拓扑同构，故X是局部凸的．由〔2〕中的17.5知，只需证明对任$f\in X^*$，都有$\sup\limits_{x\in A}|f(x)|<+\infty$

任取$x_1\in X$，$x_1\neq\theta$，因A是直线有界的，故存在$\alpha\neq 0$，使得$\alpha_1x_1\notin A$，令$y_1=\alpha_1x_1$．因A是均衡的，闭的，凸的，据Hahn－Banach隔开定理，存在$f_1\in X^*$，$M_1>0$使得$\sup\limits_{x\in A}|f_1(x)|\leq M_1$，$f_1(y_1)=1$．

在f_1的零空间$f_1^{-1}(0)$中，可取$y_2\neq\theta$．同上理由，存在$f_2\in X^*$、$M_2>0$使得

*引理2及定理1，利用S.Rolewiz定理（1957），化为在赋$p(0<p\leq1)$范空间讨论，也可得到证明．

$\sup_{x\in A}|f_2(x)|\leq M_2$, $f_2(y_2)=1$．f_1, f_2显然是线性无关的．如$n>2$，则$f_1^{-1}(0)\cap f_2^{-1}(0)$必含有非零元，否则据〔4〕的定理3.5—c知，任$g\in X^*$，$g$均为$f_1$, f_2的线性组合，因此$\dim X^*=2$，这是不可能的．于是可取$y_3\neq\theta$, $y_3\in f_1^{-1}(0)\cap f_2^{-1}(0)$．相应存在$f_3\in X^*$，$M_3>0$．使得

$$\sup_{x\in A}|f_3(x)|\leq M_3,\quad f_3(y_3)=1\text{．}$$

如此继续下去，可得n个线性无关的元素$f_1, f_2, \cdots, f_n\in X^*$．$M_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$满足$\sup_{x\in A}|f_i(x)|\leq M_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$．因$f_1, f_2, \cdots, f_n$是线性无关的，故是X^*的一代数基．因此对任$f\in X^*$，都有$\sup_{x\in A}|f(x)|<+\infty$．故A是有界的．证毕．

由定理1和引理3立即得到定理2及定理2′．

定理2　设X是局部有界的，X^*是完全的，则X是无穷维空间的充要条件是：X中存在一Klee子集．

定理2′　设X是局部有界的，X^*是完全的，则X是有限维的充要条件是：X中不存在Klee子集，或说X中任一直线有界的均衡凸闭集都是有界的．

我们知道，在有些线性拓扑空间中（设拓扑为τ），τ有界性和w有界性是等价的（例如局部凸空间），但有的线性拓扑空间中，τ有界和w有界是不等价的（见本文最后的例子）．下面的两条定理在后一种类型的空间中讨论．

定理3　设X是线性拓扑空间（拓扑为τ），X^*是完全的，X中的τ有界性和w有界性是不等价的，则在X中必存在Klee子集．

证　因τ有界集必是w有界的，故按定理条件，X中必存在子集B，B是w有界但不是τ有界的．

设$h_b(B)$是B的均衡包（即$h_b(B)=EB$，$E=\{\alpha\in K; |\alpha|\leq 1\}$），则$h_b(B)$是w有界的．记$h_{bc}(B)$是$h_b(B)$的凸包．因$(X, w)$是局部凸线性拓扑空间，故$h_{bc}(B)$是$(X, w)$中的有界集，$h_{bc}(B)$在$(X, w)$中的闭包$\overline{h_{bc}(B)}^w$也是w有界的．

记$A=\overline{h_{bc}(B)}^w$，则A显然是凸的，均衡的，据引理1知，A必是直线有界的．因A是w闭集，故A也是τ闭集．由$B\subset A$立即知道A不是τ有界的．因此A是X中一Klee子集．证毕．

定理4　设X是局部有界的，但非局部凸的（拓扑为τ），X^*是完全的，则X中存在一Klee子集，它也是一个凸体（即包含内点的凸集）．

证　首先证明：X中θ的任一有界邻域V的凸包Co(V)必是无界的．事实上，如存在θ的某有界邻域V，Co(V)也是有界的．则因Co(V)也是开集，故也是θ的邻域，从而

$\{\frac{1}{n}\mathrm{Co}(V)\}$ $n=1,2,\cdots$　可构成X的局部基，又因每一$\frac{1}{n}\mathrm{Co}(V)$均是凸集，故由此可以推得X是局部凸的线性拓扑空间，这与已知相矛盾．

从X的局部有界性，我们可取θ的一有界的均衡邻域V，由上一段知，Co(V)是无界的．因V是τ有界的，故V也是w有界的，因(X, w)是局部凸的，故Co(V)也是w有界的．注意Co(V)也是均衡的．

令$A=\overline{\mathrm{Co}(V)}^w$，则与定理3证明中最后部分相类似，可证A是凸的，均衡的，闭的，直线有界的．但A是无界的．故A是一Klee子集．又因$V\subset A$，因此A也是一凸体．证毕．

推论1　设X是无穷维的局部有界的线性拓扑空间，X^*是完全的．则X中必存在一列

递缩的无界的但是直线有界的闭集 $\{A_n\}$，$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$．

证　由定理1知，X中存在一Klee子集A．任意取定 θ 的一有界的均衡邻域V，令 $A_1 = A \cap (X \setminus V)$，$A_2 = A \cap (X \setminus 2V)$，…，$A_n = A \cap (X \setminus nV)$，…．则每一 A_n 均是闭的，直线有界的．

每一 A_n 也是无界的．事实上，因 nV 是有界的，故 $A \cap (nV)$ 是有界的．因 $A = [A \cap (nV)] \cup A_n$．故如 A_n 有界，则可推得A是有界的，这是不可能的．

因V是均衡的，故 $V \subset 2V \subset 3V \subset \cdots$。因此 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$．现证 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$．设不然，则存在 $x_0 \in X$，$x_0 \in A_n$，$n = 1, 2, \cdots$．因V是 θ 的邻域，故是吸收的，从而 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$ 因此必存在 n_0，使得 $x_0 \in n_0 V$，这与 $x_0 \in A_{n_0}$ 相矛盾．这表明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$．证毕．

推论2　设X满足推论1中条件，且X中 τ 有界集与w有界集等价，则X中必存在一列递缩的 τ 无界但是直线有界的闭的凸集 $\{A_n\}$，且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$．

证　取A如推论1．因A不是w有界的，故必存在 $f_0 \in X^*$，使得 $\sup_{x \in A} |f_0(x)| = +\infty$．因此 $\sup_{x \in A} \mathrm{Re}\, f_0(x) = +\infty$．　令 $A_n = A \cap \{x \in X: \mathrm{Re}\, f(x) \geq n\}$，$n = 1, 2, \cdots$，则 A_n 即所求．证毕．

附注　当X是无穷维的，局部有界又是局部凸时或者直接设X是无穷维的赋范线性空间时，推论2即化为〔1〕中定理1．

例　通常的线性拓扑空间 l^p（$0 < p < 1$）．熟知此空间是局部有界的，不是局部凸的〔5；p180〕且 $(l^p)^* = l^\infty$〔5；p95〕，是完全的．

令 $B_1 = \{x \in l^p: x = (x_1, x_2, \cdots),\ d(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < 1\}$，则由定理4的证明立即可知，$\overline{Co(B_1)}^w$ 是 l^p（$0 < p < 1$）中一Klee子集，且是一凸体．

上面的例子表明，存在Klee子集的线性拓扑空间类中，除了局部有界且局部凸的空间外，至少还有局部有界但非局部凸的空间（要求 X^* 完全），这表明本文的结果确是〔1〕中情形的推广．

附记　作者1982年暑假中在上海期间，从美国Iowa大学林伯禄教授关于Banach空间理论的讲学中受到启发，作成此文，作者谨向林教授致谢．

参考文献

〔1〕V.L.Klee,Jr.,A Note on Topological properties of Normed Linear Spaces,Proc.Amer.Math.Soc.,Vol.7(1956),pp673—674.

〔2〕Kelley,J.L. and I.Namioka,Linear Topological Spaces,GTM36, Springer-Verlag.

〔3〕Dunford,N. and J.T.Schwarz,Linear Operators,I,Interscience,1958.

〔4〕A.E.Taylor,Introduction to Functional Analysis,New York,1958.

〔5〕Wilansky,A.,Functional Aalysis, Blaisdell,1964.