p.n.p.矩阵的一些性质*

逄 明 贤

(吉林师范学院)

一个 n 阶实方阵若其各阶主子式皆非正，则称为部分非正阵，简写作p.n.p.矩阵．特别地，各阶主子式皆负的 p.n.p.矩阵称为部分负矩阵，简写为 p.n.矩阵．文〔1〕、〔5〕讨论了 p.n.p.矩阵的谱性质．本文在〔5〕的基础上讨论了 p.n.p.矩阵的若干性质，并给出 p.n.p.矩阵特征值的某些估计式．

引理 1 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一 p.n.p.矩阵，则A的特征值之实部不全为负（$n\geq 2$）．

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为A的全部特征值．假定A的每一特征值之实部皆为负．分两种情况讨论：

1）当 n 为偶数时．由 $\det A=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\prod\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|>0$. 即知此矛盾于A为p.n.p.矩阵．

2）当 n 为奇数时．由 $\det A\leq 0$ 知A应有奇数个负特征值．故可设A的全部特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\mu_1,\overline{\mu}_1,\cdots,\mu_{\frac{n-r}{2}},\overline{\mu}$ ，这儿 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 为负特征值，r 为奇数．

考察A的所有可能的二个特征值之积的和 σ．可分为下面三部分：

i）$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 中任取二个之积的和 σ_1．显然 $\sigma_1\geq 0$（仅当 $r=1$ 时 $\sigma_1=0$）．

ii）$\mu_1,\overline{\mu}_1,\cdots,\mu_{\frac{n-r}{2}},\overline{\mu}_{\frac{n-r}{2}}$ 中任取二个之积的和 σ_2．对于其中任意二个复数的积 $\mu_{j_1}\mu_{j_2}$（$1\leq j_1,j_2\leq\frac{n-r}{2}$），若 $\mu_{j_1}=\overline{\mu}_{j_2}$，自然 $\mu_{j_1}\mu_{j_2}\geq 0$．否则设 $\mu_{j_1}=a_{j_1}+b_{j_1}i$ 及 $\mu_{j_2}=a_{j_2}+b_{j_2}i$，$j_1\neq j_2$．则有

$\mu_{j_1}\mu_{j_2}+\mu_{j_1}\overline{\mu}_{j_1}+\overline{\mu}_{j_1}\mu_{j_2}+\overline{\mu}_{j_1}\overline{\mu}_{j_2}=(\mu_{j_1}+\overline{\mu}_{j_1})(\mu_{j_2}+\overline{u}_{j_2})=4(\mathrm{Re}\mu_{j_1})(\mathrm{Re}u_{j_2})>0$. 因此易知诸乘积之虚部的总和应为零．故有 $\sigma_2\geq 0$（仅当 $r=n$ 时 $\sigma_2=0$）．

iii）从 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 中任选一个与从 $\mu_1,\overline{\mu}_1,\cdots,\mu_{\frac{n-r}{2}},\overline{\mu}_{\frac{n-r}{2}}$ 中任选一个作乘积之和 σ_3．同ii）相类似亦有诸乘积之虚部的总和为零．故亦有 $\sigma_3\geq 0$（仅当 $r=n$ 时 $\sigma_3=0$）．

这样一来，$\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$．显然 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 不同时为零．故必 $\sigma>0$.

另一方面，σ 应等于A之全部二阶主子式之和．而A之每个二阶主子式非正，此与 $\sigma>0$ 矛盾．

联系〔5〕之定理1我们立即得到

定理 1 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一p.n.p. 矩阵，则A的特征值之实部不能取得相同符号．

推论 1 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一非奇异 p.n.p. 矩阵，则A的特征值之实部既非全部非负

* 1982年12月28日收到．

也非全部非正.

证 由〔1〕之定理1知A必有一负特征值，断言A之其他特征值之实部必有正者. 若不然，仿引理1之证法，亦可导出A之全部二阶主子式之和为正的矛盾来.

利用上述结论，我们可以推出p.n.p.矩阵的一些性质.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为复矩阵. 记$\Lambda_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$，$N=\{1,2,\cdots,n\}$，$J(A)=\{i\in N，|a_{ii}|>\Lambda_i\}$. 若对$i=1,2,\cdots,n$皆有$|a_{ii}|\geq\Lambda_i$，则称A为对角占优矩阵，记为$A\in D_0$. 若$A\in D_0$，且J(A)非空集，而对任一$k\bar{\in}J(A)$皆有$a_{kr_1}a_{r_1r_2}\cdots a_{r_sl}\neq0$，$l\in J(A)$，则称A为准严格对角占优矩阵，记为$A\in I$. 若对$i=1,2,\cdots,n$皆有$|a_{ii}|>\Lambda_i$，则称A为严格对角占优矩阵，记为$A\in D$.

记$T=\frac{1}{2}(A+A^*)$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$A^*=(\bar{A})^T=(\bar{a}_{ji})_{n\times n}$. 若$T\in D_0$，则称A为共轭对角占优矩阵，记为$A\in G_0$. 若$T\in G$，则称A为共轭严格对角占优矩阵，记为$A\in G$. 若$T\in I$，则称A为共轭准严格对角占优矩阵，记为$A\in Q$.

定理2 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为一p.n.p.矩阵，则$A\bar{\in}I\cup D$. 特别地，若A还是非奇异的，则进一步有$A\bar{\in}D_0$.

证 若$A\in I\cup D$，则必$a_{ii}<0$，$i=1,2,\cdots,n$. 由〔2〕之定理1立得A的n个特征值之实部皆为负，此矛盾于定理1.

当A非奇异时，若$A\in D_0$，则由$a_{ii}\leq0$ $(i=1,2,\cdots,n)$及Gerschgorin园盘定理直接推出A的特征值之实部皆非正，此矛盾于推论1.

利用〔3〕之定理1的结果，又得到

推论2 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为一p.n.p.矩阵，则$A\bar{\in}G\cup Q$. 特别地，若A还是非奇异的，则进一步有$A\bar{\in}G_0$.

引理2 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为一p.n.p.矩阵. 若A满足当$j>i$时（或$i>j$时）$a_{ij}>0$，$i,j=1,2,\cdots,n$. 则A的非对角线元素皆为非负.

证 只给出当$j>i$时$a_{ij}>0$时的证明. 当$j<i$时$a_{ij}>0$之证明类似.

对任意$j>i$，考察A之任一二阶主子式$\det A\begin{Bmatrix} i & j \\ i & j \end{Bmatrix}$的展开式

$$\det A\begin{Bmatrix} i & j \\ i & j \end{Bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}=a_{ii}a_{jj}-a_{ij}a_{ji}.$$

因A为p.n.p.矩阵，故

$$a_{ij}a_{ji}\geq a_{ii}a_{jj}\geq0.$$

又因$a_{ij}>0$，故得$a_{ji}\geq0$. 注意$j>i$之任意性，便知引理为真.

定理3 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为一非奇异p.n.p.矩阵. 若当$j>i$时（或$i>j$时）$a_{ij}>0$，$i,j=1,2,\cdots,n$. 则A之$n-1$阶代数余子式中为负，因此A^{-1}必含正元.

证 如若A之每一$n-1$阶代数余子式皆非负，则有

$$(-A)^{-1}=-(\det A)^{-1}\operatorname{adj}A\geq0.$$

由引理2及〔4〕即知$-A$为M—矩阵. 从而$-A$的特征值之实部皆正，或A的特征值之实皆负，此矛盾于定理1.

由〔5〕之引理2及定理3可得

推论3 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为一非奇异p.n.p.矩阵．若A满足$a_{ii}=0$，$i=1,2,\cdots,n$，且当$j<i$时$a_{ij}<0$（或$a_{ji}<0$），$i,j=1,2,\cdots,n$，则A之$n-1$阶代数余子式中至少有一为正，因此A^{-1}必含负元．

下面对p.n.p.矩阵特征值的界给出一些估计式．

定理4 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为一p.n.p.矩阵．记$-s_i$为A之i阶主子式之和，$i=1,2,\cdots,n$，则有

1）$\max\{\min(1,\sum_{i=1}^{n}s_i),\ \min(s_n,s_{n-1}+1,\cdots,s_1+1)\}\leq\rho(A)\leq$

$$\leq\min\left\{\max(1,\sum_{i=1}^{n}s_i),\ \max(s_n,s_{n-1}+1,\cdots,s_1+1)\right\}$$

2）若A还是非奇异的，当且仅当$\sum_{i=1}^{n}s_i<1$时，$\rho(A)<1$．

证 显然$s_i\geq0$，$i=1,2,\cdots,n$．由〔5〕之定理2知$B=-A$与其相应的Frobenius矩阵

$$C=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&\cdots&0&1\\s_n&s_{n-1}&&\cdots&s_2&s_1\end{pmatrix}$$

有相同的特征多项式，故知$\rho(A)=\rho(B)=\rho(C^T)$．注意C为非负矩阵，故

$$\min_i\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\leq\rho(C)\leq\max_i\sum_{i=1}^{n}c_{ij}.$$

注意$\min_i\sum_{j=1}^{n}c_{ij}=\min\left\{1,\sum_{i=1}^{n}s_i\right\}$，$\max_i\sum_{i=1}^{n}c_{ij}=\max\left\{1,\sum_{i=1}^{n}s_i\right\}$，并对$C^T$的相应行和给出关于$\rho(C)$的不等式，又得

$$\min\{s_n,s_{n-1}+1,\cdots,s_1+1\}\leq\rho(C)\leq\max\{s_n,s_{n-1}+1,\cdots,s_1+1\}.$$

把两组不等式联合起来便得1）．

若A非奇异，知$s_n=-\det A>0$，故C为非负不可约矩阵．显然$\sum_{i=1}^{n}s_i<1$时有

$\min\left\{\max(1,\sum_{i=1}^{n}s_i),\ \max(s_n,s_{n-1}+1,\cdots,s_1+1)\right\}=1$，因之有$\rho(A)<1$．反之，若$\rho(A)<1$，我们断言$\sum_{i=1}^{n}s_i<1$．否则由$\sum_{i=1}^{n}s_i\geq1$有

$\max\left\{\min(1,\sum_{i=1}^{n}s_i),\ \min(s_n,s_{n-1}+1,\cdots,s_1+1)\right\}\geq1$，从而推得$\rho(A)\geq1$，此为矛盾．

定理5 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为一p.n.p.矩阵．若A满足当$j>i$时（或$i>j$时）$a_{ij}>0$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则

1）A之实部最大特征值α是一非负实数，与α相当的特征向量$X\geq0$，且$\alpha=\gamma-\beta$，这

儿 $\beta = -\min\limits_i a_{ii}$，$\gamma = \rho(\beta I + A)$；

2）α 满足 $\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} \le \alpha \le \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}$；

3）A之任一特征值λ满足 $|\lambda| \le \beta + \gamma$.

证 设$\beta = -\min\limits_i a_{ii}$．由引理2知 $B = \beta I + A$ 为非负阵，故B有一按模最大非负特征值γ与相应的非负特征向量X，即有 $BX = \gamma X$，进而得 $AX = (\gamma - \beta)X$，可见$\alpha = \gamma - \beta$为A之相应于特征向量X的特征值．而若λ为A之任一特征值，则$\lambda + \beta$ 为B之相应于同一特征向量的特征值，因而又有 $|\lambda + \beta| \le \gamma$，进而得 $\mathrm{Re}\lambda \le \gamma - \beta$，即$\alpha = \gamma - \beta$为A之实部最大的特征值．又由定理1知必有 $\gamma - \beta \ge 0$，当A非奇异时 $\alpha = \gamma - \beta > 0$，故1）成立．

因$B = (b_{ij})_{n \times n}$为非负矩阵，故 $\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^n b_{ij} \le \gamma \le \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n b_{ij}$．注意 $\sum\limits_{j=1}^n a_{ij} = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} + \beta$，$i = 1, 2, \cdots, n$，即得 $\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} \le \gamma - \beta \le \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}$．又由 $|\lambda - \beta| \le \gamma$对A的任意特征值$\lambda$皆真，推得 $|\lambda| \le \beta + \gamma$．可见2）、3）成立．

推论4 设$A = (a_{ij})_{n \times n}$除满足定理5之全部条件外还满足 $\sum\limits_{j=1}^n a_{ij} = \sigma$，$i = 1, 2, \cdots, n$．则

1）σ为A之实部最大特征值，其相应特征向量为$e = (1, 1, \cdots, 1)^T$；

2）A之任意特征值 $\lambda \ne \sigma$ 满足 $|\lambda| \le \min\left\{\sigma - \sum\limits_{j=1}^n \min\limits_i a_{ij},\ \left(\sum\limits_{j=1}^n \max\limits_i a_{ij}\right) - \sigma\right\} + \beta$.

证 由已知易见 $\beta \ge 0$，进而有 $\sum\limits_{j=1}^n b_{ij} = \beta + \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} = \beta + \sigma > 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$．故知B为广义随机阵，从而 $\beta + \sigma$ 为B之按模最大特征值 $\rho(B)$，其相应的特征向量为$e = (1, 1, \cdots, 1)^T$．再由定理5知 $\sigma = \rho(B) - \beta$ 为A之实部最大特征值，其相应特征向量为$e = (1, 1, \cdots, 1)^T$.

由〔4〕知对B的任意特征值 $\mu \ne \beta + \sigma$ 有

$$|\mu| \le \min\left\{\beta + \sigma - \sum_{j=1}^n \min_i b_{ij},\ \left(\sum_{j=1}^n \max_i b_{ij}\right) - \beta - \sigma\right\}.$$

注意$\mu - \beta$为A之相应特征值λ，且由$\mu \ne \beta + \sigma$知 $\lambda \ne \sigma$．这样一来，由 $|\lambda| \le |\mu| + \beta$ 以及 $\sum\limits_{j=1}^n \min\limits_i b_{ij} = B + \sum\limits_{j=1}^n \min\limits_i a_{ij}$，$\sum\limits_{j=1}^n \max\limits_i b_{ij} = \beta + \sum\limits_{j=1}^n \max\limits_i a_{ij}$，再由 $|\mu|$ 之估计式即可得2）．易见，在推论4中若A的主对角线元素皆为零，则$\sigma = \rho(A)$．

定理6 设$A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为一不可约 p.n.p. 矩阵，且当 $j > i$ 时（或$i > j$时）$a_{ij} < 0$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$．则

1）A有一负特征值λ_1使 $|\lambda_1| = \rho(A)$，对应于 λ_1 的特征向量为正向量；

2）λ_1满足 $\max\left\{\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|,\ \beta_0 - \frac{1}{r}\right\} \le |\lambda_1| \le \min\left\{\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|,\ \beta_0 - \frac{1}{R}\right\}$，

这儿$\beta_0 > \max\limits_i |a_{ii}|$，$B_0 = \beta_0 I + A$，$B_0^{-1} = (\widetilde{b}_{ij})_{n \times n}$，$r = \min\limits_i \sum\limits_{j=1}^n \widetilde{b}_{ij}$，$R = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n \widetilde{b}_{ij}$．

证　由〔5〕知$A\leq 0$，故$B=-A$为非负不可约矩阵，从而B有一正特征值$-\lambda_1$使得$-\lambda_1=\rho(B)=\rho(A)$，故知A有一负特征值$\lambda_1$使得$\rho(A)=|\lambda_1|$且相应的特征向量为正．又显然$\lambda_1$满足$\min\limits_i\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|\leq|\lambda_1|=-\lambda_1\leq\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|$．另一方面，因$\beta_0>\max\limits_i|a_{ii}|$，故知$B_0=\beta_0I+A=\beta_0I-B$应为一M一矩阵．从而$B_0^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}\geq 0$，于是$\rho(B_0^{-1})$满足$r=\min\limits_i\sum\limits_{j=1}^n\tilde{b}_{ij}\leq\rho(B_0^{-1})\leq\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n\tilde{b}_{ij}=R$．进而得$B^0$之最小特征值（见〔2〕）$\frac{1}{\rho(B_0^{-1})}$满足$\frac{1}{R}\leq\frac{1}{\rho(B_0^{-1})}\leq\frac{1}{r}$．由1）知$-\lambda_1=\rho(A)$，且显然$\beta_0+\lambda_1$为$B_0$之最小实特征值，故知又有$\frac{1}{R}\leq\beta_0+\lambda_1\leq\frac{1}{r}$，即是$\beta_0-\frac{1}{r}\leq-\lambda_1=|\lambda_1|\leq\beta_0-\frac{1}{R}$．再由前面$\lambda_1$之不等式即导出2）．

作者对南京大学佟文廷副教授对本文的热忱指导致以衷心感谢．

参　考　文　献

〔1〕Johnson, J. J.. On Partially Non-positive Matrices, Linear Algebra Appl., 8(1974), 185-187.
〔2〕佟文廷，关于几类矩阵的特征值分布，数学学报，20：4（1977），272--275.
〔3〕张家驹，共轭对角占优矩阵的特征值分布，数学学报，23，4（1980），514--516.
〔4〕A. Berman and R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Academic, New York, 1979.
〔5〕逄明贤，关于p.n.p.矩阵的谱性质，本刊Vol. 6, No.2（1986）.

Some proparties of p.n.p. matrices

Pang Ming-xian

Abstract

In this paper, first we have obtained an estimation for signs of real parts of eigenvalues of p.n.p. matrix, and have given some properties of p.n.p. matrix. In addition, we give respectively different estimations of eigenvalues for nonsingular p.n.p. matrix and p.n.p. matrix, whose nondiagonal entries are nonnegative values or nonposrtive values.