数学研究与评论
第六卷　第四期

集合论与代数的新运算（Ⅰ）*

杨　安　洲

（北京工业大学）

定义1　令$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$n$是自然数；$\mathbf{p}(X)=\{A: A\subseteq X\}$；对于任意给定的$A, B\in\mathbf{p}(X)$，$A=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\}$，$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$，$B=\{x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_l}\}$，$1\leq j_1<j_2<\cdots<j_l\leq n$，当$A\cap B=\phi$时令$\varphi(A, B)=A$，当$A\cap B\neq\phi$时，$\min\{\beta: x_\beta\in A\ \ B\}=i_{a+1}$时令$\varphi(A, B)=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots x_{i_a}, x_{i_{a-2}}, \cdots, x_{i_k}\}$；然后令$A*B=\varphi(A, B)\cup\varphi(B, A)$，即先用$\varphi$，然后用“并运算”.

定理1　$\langle\mathbf{p}(X), *\rangle$是循环群（有限的），在运算$*$下由X出发可生成$\mathbf{p}(X)$.

定义1′　令$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$n$是自然数；$\mathbf{p}(X)=\{A: A\subseteq X\}$；对任$A\in\mathbf{p}(X)$先作一一对应$A\rightleftarrows(i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots, i_n)$，$i_1, i_2, \cdots, i_n\in\{0, 1\}$，满足$(\forall 1\leq k\leq n)(x_k\in A\Leftrightarrow i_k=1)\&(\forall 1\leq k\leq n)(x_k\notin A\Leftrightarrow i_k=0)$，然后把A与A所对应的$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$作恒同理解；对于$A=(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，$B=(j_1, j_2, \cdots, j_n)\in\mathbf{p}(X)$，当$\{l: i_l=j_l=1\}\neq\phi$，$\min\{l: i_l=j_l=1\}=l_0$时令$\varphi(A, B)=(k_1, k_2, \cdots, k_n)\in\mathbf{p}(X)$，只有$k_{l_0}=0$，余下的$k_a$均与A中的$i_a$相同，而当$A\cap B=\phi$时令$\varphi(A, B)=A$；然后再令$A*B=\varphi(A, B)\cup\varphi(B, A)$.

定理1′　按定义1′，$\mathbf{p}(X)=\{(i_1, i_2, \cdots, i_n): i_a=0$或$i_a=1, 1\leq a\leq n\}$则有$\langle\mathbf{p}(X), *\rangle$是循环群，在运算$*$下由$X=(1, 1, \cdots, 1)$出发可生成$\mathbf{p}(X)$.

定义2　令$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$n$是自然数；按上面的有关的规定，$\mathbf{p}(X)=\{A: A\subseteq X\}=\{(i_1, i_2, \cdots, i_n): i_a=0$或$1\}$；对于$A=(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，$B=(j_1, j_2, \cdots, j_n)\in\mathbf{p}(X)$令$\varphi(A, B)=(k_1, k_2, \cdots, k_n)\in\mathbf{p}(X)$，其中当$\{l: i_l=j_l=0\}\neq\phi$，$\min\{l: i_l=i_l=0\}=l_0$时取$k_{l_0}=1$，其余所有的$k_a$均与A中的$i_a$相同；然后再令$A*B=\varphi(A, B)\cap\varphi(B, A)$，i，e．先用$\varphi$，然后用“交运算”.

定理2　按定义2中的规定，则$\langle\mathbf{p}(X), *\rangle$是循环群，在运算$*$下由$\phi$（空集）出发可生成$\mathbf{p}(X)$.

注：（1）定义1′是同构原理的应用，（2）定义2是对偶原理的应用，（均对定义1而言的）.

* 1986年6月10日收到.