数学研究与评论
第六卷　第四期

四元数矩阵的分解与Lavoie不等式的推广*

庄　瓦　金

（南平师专）

注意到著名的Hadamard不等式推广的新近进展[1]、[2]，本文在〔3〕~〔6〕的基础上研究了Lavoie行列式不等式在四元数体H上的推广。为此，我们先证明了四元数矩阵的两个分解定理。

本文约定：$\mathbf{H}_n^{\geq}=\{X\in \mathbf{H}^{n\times n}|X$是半正定自共轭的$\}$，$\mathbf{H}_n^{>}=\{X\in \mathbf{H}_n^{\geq}|\mathbf{X}$是正定的$\}$，$\mathbf{H}_U^{m\times n}=\{X\in \mathbf{H}^{m\times n}|X^*X=I_n\}$.

1．四元数矩阵的因式分解

由〔4〕、〔5〕，利用矩阵分块方法证得

引理1　设$A\in \mathbf{H}_n^{\geq}(\mathbf{H}_n^{>})$，$m$是自然数，则有唯一的$B\in \mathbf{H}_n^{\geq}(\mathbf{H}_n^{>})$，使得$A=B^m$，且$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B$．

定理1　（极分解）．设$A\in \mathbf{H}^{n\times n}$，那么

$$A=PU=U_1P_1, \qquad (1)$$

这里U，$U_1\in \mathbf{H}_U^{n\times n}$，$P$，$P_1\in \mathbf{H}_n^{\geq}$是唯一确定的．若A非奇异，则$P$，$P_1\in \mathbf{H}_n^{>}$是唯一确定的的，$U$，$U_1\in \mathbf{H}_U^{n\times n}$是唯一确定的，且$U=U_1$．

证　由〔4〕与引理1知$AA^*=P^2$，其中$P\in \mathbf{H}_n^{\geq}$．设$\operatorname{rank}P=r$，则由〔5〕知有$V\in \mathbf{H}_U^{n\times n}$，使$VPV^*=\operatorname{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r,0,\cdots,0)$，$\sigma_i>0$，$i=1,\cdots,r$．命

$$\operatorname{diag}(\sigma_1^{-1},\cdots,\sigma_r^{-1},1,\cdots,1)VAV^*=\begin{pmatrix}D_1\\D_2\end{pmatrix},\quad D_1=(d_{ij})\in \mathbf{H}^{r\times n},\ 则$$

$D_1D_1^*=I_r$，$D_2=0$．于是由〔6〕与〔5〕知齐次线性方程组$D_1X=0$有广义标准正交基础解系　$\begin{pmatrix}\bar{a}_{i1}\\ \vdots\\ \bar{a}_{in}\end{pmatrix}$，$i=r+1,\cdots,n$．命$D=(d_{ij})\in \mathbf{H}^{n\times n}$，$U=V^*DV$，则$U\in \mathbf{H}_U^{n\times n}$，且$A=PU$．类似可证$A=U_1P_1$．$P$，$P_1$的唯一性由引理1的唯一性证得．定理前半部分得证．由定理的前半部分与〔4〕证得定理的后半部分．

由（1）的证明易见Autonne定理可推广为

定理2　设$A\in \mathbf{H}_r^{n\times n}$.则有$U$，$V\in \mathbf{H}_U^{n\times n}$，使得

$$A=UDV^*,\quad D=\operatorname{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r,0,\cdots,0), \qquad (2)$$

这里$\sigma_i=\lambda_i^{1/2}$，λ_i为AA^*的非零特征值，$i=1,\cdots,r$．

*1984年3月19日收到．

定理 3 （奇异值分解）．设$A\in H_r^{m\times n}$，$r>0$，那么

$$A=U_0\Delta V_0^*,\ \Delta=\mathrm{diag}(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_r),\ \sigma_i=\lambda_i^{1/2},\ i=1,\cdots,\ r, \tag{3}$$

这里$U_0\in H_U^{m\times r}$，$V_0\in H_U^{n\times r}$，$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r>0$为$AA^*$的非零特征值。此时，$\sigma_1$，…，$\sigma_r$叫做A的正奇异值，$A=U_0\Delta V_0^*$叫做A的奇异值分解．

证 当$m=n$时由定理2易见（3）成立．当$m<n$时，命$A_1=\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}\in H^{n\times n}$，注意到$A_1A_1^*$与$AA^*$有相同的正特征值，从而由$A_1$的奇异值分解可推得此时（3）式也真，当$m>n$时类似证之．

注 本文的证明都是提要式的．由定理1的证明易见：(i) $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}AA^*=r$，且若$AA^*$的正特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，则P与$P_1$的非零特征值同为$\sigma_i=\lambda_i^{1/2}$，$i=1,\cdots,r$．(ii) 若$U\in H_U^{m\times n}$，则有$V\in H_U^{m\times(m-n)}$，使$(U,\ V)\in H_U^{m\times m}$．(iii) AA^*与A^*A有相同的正特征值．因此，定理3还可表述为：设$A\in H_r^{m\times n}$，则有$U\in H_U^{m\times m}$，$V\in H_U^{n\times n}$，使得$A=U\begin{pmatrix}\Delta&0\\0&0\end{pmatrix}V^*$，其中$\Delta=\mathrm{diag}(\lambda_1^{1/2},\cdots,\lambda_r^{1/2})$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$为$AA^*$或$A^*A$的正特征值．

2 Lavoie不等式在四元数体上的推广

先考虑A的Moore-Penrose逆[7]的显式，容易验证

引理 2 设$A\in H_r^{m\times n}$，$r>0$．若A的奇异值分解如（3）所示，则它的Moore-Penrose逆$A^+=V_0\Delta^{-1}U_0^*$．

现在，〔2〕的结果可推广为

定理 4 设$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_t\end{pmatrix}\in H^{m\times n}$，$A_i\in H^{m_i\times n}$，$i=1,\cdots,t$，$B=(A_1^+,A_2^+,\cdots,A_t^+)$．其中$A_i^+$为$A_i$的Moore-Penrose逆．那么AB是四元数体上的可中心化矩阵，并且

$$0\leq\|AB\|\leq1, \tag{4}$$

其中（4）式左边等号成立的充要条件是$\mathrm{rank}A<m$；当$\mathrm{rank}A=m$时，右边等号成立的充要条件是A的子块A_i是块广义正交的，即$A_iA_j^*=0$，$i\neq j$，$i,\ j=1,\cdots,t$．

证 先设$A_i\in H_{r_i}^{m_i\times n}$，$0<r_i\leq m_i$，则由定理3可设$A_i$的奇异值分解为$A_i=U_iD_iV_i^*$，从而由引理2知$A_i^+=V_iD_i^{-1}U_i^*$，$i=1,\cdots,t$．所以，如〔8〕所述，有

$$AB=UDV^*VD^{-1}U^*,\ U=\mathrm{diag}(U_1,\cdots,U_t),\ D=\mathrm{diag}(D_1,\cdots,D_t),$$

$$V=(V_1,\cdots,V_t),\quad V^*V=\begin{pmatrix}I_{r_1}&V_1^*V_2&\cdots&V_1^*V_t\\V_2^*V_1&I_{r_2}&\cdots&V_2^*V_t\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\V_t^*V_1&V_t^*V_2&\cdots&I_{r_t}\end{pmatrix} \tag{5}$$

下面分两种情形考虑：1° 若A'是左高矩阵，则由〔6〕知$AB\sim V^*V$，从而由〔5〕知AB可中心化且$\|AB\|=\|V^*V\|$．又由〔6〕、〔4〕知V^*V是正定自共轭的．因此，注意到(5)，由〔4〕、〔3〕知$0<\|AB\|=\|V^*V\|\leq1$，并且右边等号成立的充要条件如定理所述．

2° 若A'不是左高矩阵，此时：(i) A_i'都是左高矩阵，则同情形1°知AB可中心化，但因

$\operatorname{rank}AB<m$，故 $\|AB\|=0$；（ii）若A_i'不全是左高矩阵，则有$W\in H_U^{m\times n}$，使$AB=(U,W)$ $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^*V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U^* \\ W^* \end{pmatrix}$，其中 $(U,N)\in H_U^{m\times m}$，$r=\sum_{i=1}^{t} r_i<m$，$s=m-r$，于是如上知AB可中心化，且由〔5〕知 $\|AB\|=0$．

最后考虑A_i至少有一个为零矩阵的情形．此时，若$A_i=0$，则上述相应的$D_i=0$，D_i^{-1}应更为$D_i^+=0$．在矩阵相等下，我们把这样D_i, D_i^+的零对角元全更为1，则其零可转移到V^*V的相应行、列上，从而由2°所证知AB可中心化，且 $\|AB\|=0$．

参 考 文 献

〔1〕谢邦杰，Hadamard定理在四元数体上的推广，中国科学，数学专辑（Ⅰ），88—93(1979)．
〔2〕J.L.Lavoie, A determinantal inequality involving the Moore-Penrose inverse, Linear Algebra Appl．31:77—80(1980)．
〔3〕谢邦杰，自共轭四元数矩阵的行列式的展开定理及其应用，数学学报，23:668-683(1980)
〔4〕谢邦杰，四元数自共轭矩阵与行列式，吉林大学自然科学学报，25:19—35(1980)．
〔5〕谢邦杰，任意体上可中心化矩阵的行列式，吉林大学自然科学学报，26:1—33(1980)．
〔6〕谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982．
〔7〕庄瓦金，体上矩阵的广义逆，《数学杂志》，6:1(1986)105-112．
〔8〕G.P.H.Styam, On Lavoie's determinantal ineqality, Linear Algebra Appl.，37:77—80(1981)．