关于富里埃及数和幂级数的蔡查罗平均*

刘 丽 婉

（上海市第二工业大学虹桥分校）

引 言

设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，$|f(x)|$和它的p次幂$|f(x)|^p$是可积的，记为$f\in L_{2\pi}^p$，它的模是

$$\|f\|_p=(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx)^{1/p}.$$

当$f(x)$是以2π为周期的连续函数，则记为$f\in C_{2\pi}=L_{2\pi}^\infty$，它的模是

$$\|f\|_C=\|f\|_\infty=\max_x|f(x)|.$$

当$f\in L_{2\pi}^p$，它的连续模和光滑模是

$$\omega_p(f,\delta)=\max_{|h|\le\delta}\|f(x+h)-f(x)\|_p,\quad \omega_p^*(f,\delta)=\max_{|h|\le\delta}\|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\|_p.$$

当$\omega_p(f,\delta)\le\delta$，即$\|f(x+h)-f(x)\|_p\le h$时，称$f\in H_X^1$。如果$\omega_p^*(f,\delta)\le 2\delta$，即$\|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\|_p\le 2h$，称$f\in H_Z^2$，其中$X=L_{2\pi}^p$．

设$f\in L_{2\pi}^p(1\le p)$，它的富里埃级数是

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\ ,\tag{1}$$

（1）的共轭级数是

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\sin kx-b_k\cos kx)\ ,\tag{2}$$

用$S_n(f,x)$和$S_n(\tilde f,x)$分别表示（1）和（2）的部分和．

设$\alpha>0$，称$\sigma_n^\alpha(f,x)=\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{y=0}^{n}A_{n-j}^{\alpha-1}S_j(f,x)$为（1）的$\alpha$级蔡查罗平均，其中$A_n^\alpha=\frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{n!}$．类似地，有$\sigma_n^\alpha(\tilde f,x)$为（2）的$\alpha$级蔡查罗平均．当$\alpha=1$时，是飞耶平均，简记为$\sigma_n(f,x)$和$\sigma_n(\tilde f,x)$．

当$X=L_{2\pi}$或$C_{2\pi}$时，孙永生[1]经过复杂的计算证明了当$n\to\infty$时，量

$$A_n(\alpha)_X=\sup_{\substack{f\in H^1\\ f\ne\text{const}}}\frac{\|\sigma_n^\alpha(f,x)-f(x)\|_p}{\ln(n+1)\,\omega_p(f,\frac{2\pi}{n+1})}$$

的极限是$\frac{\alpha}{\pi^2}$．

本文给出上述结果的简单证明，并进而讨论了

* 1982年9月20日收到．

$$A_n^*(\alpha)_X=\sup_{\substack{f\in H_X^2\\ f\neq\text{const}}}\frac{\|\sigma_n^\alpha(f,\ x)-f(x)\|_p}{\ln(n+1)\omega_p(f,\ \frac{2\pi}{n+1})},$$

以及解析函数用它的幂级数的α级蔡查罗平均逼近的问题.

引理 1　设$\alpha>0$, $f(x)$ $L_{2\pi}^p(I\leq p)$, 那么

$$\|\sigma_n^\alpha(f,x)-f(x)\|_p=\frac{[L_n^\alpha]_1}{[L_n^1]_1}\|\sigma_n(f,x)-f(x)\|_p+O(\omega_p^*(f,\ \frac{2\pi}{n+1})). \tag{3}$$

其中 $[L_n^\alpha]_\nu$ $(\nu=1,2,\cdots)$ 的定义见[2].

证　由〔3〕已知当$\alpha>0$, $f(x)\in L_{2\pi}^p$时

$$\|\sigma_n^\alpha(f,x)-f(x)-[L_n^\alpha]_1(n+1)\int_0^1[\tilde f(x+\frac{t}{n+1})-\tilde f(x-\frac{t}{n+1})]dt\|_p\leq C\omega_p^*(f,\ \frac{2\pi}{n+1}).$$

所以, 有

$$\|\sigma_n^\alpha(f,x)-f(x)\|_p=[L_n^\alpha]_1(n+1)\|\int_0^1[\tilde f(x+\frac{t}{n+1})-\tilde f(x-\frac{t}{n+1})]dt\|_p+O(\omega_p^*(f,\frac{2\pi}{n+1}))$$

$$\|\sigma_n(f,x)-f(x)\|_p=[L_n^1]_1(n+1)\|\int_0^1[\tilde f(x+\frac{t}{n+1})-\tilde f(x-\frac{t}{n+1})]dt\|_p+O(\omega_p^*(f,\frac{2\pi}{n+1})).$$

于是（3）得证.

定理 1　当$\alpha>0$, $X=L_{2\pi}^p$, $1\leq p\leq+\infty$时, 有

$$A_n(\alpha)_X=\alpha A_n(1)_X+O(\frac{1}{\ln(n+1)}). \tag{4}$$

证　（3）的两端同除以$\ln(n+1)\omega_p(f,\ \frac{2\pi}{n+1})$, 并注意到$\omega_p^*(f,\ \delta)\leq 2\omega_p(f,\ \delta)$, 由此定理得证.

引理 2　当$p=1$或$+\infty$时, 有不等式:

$$\frac{\|\sigma_n(f,\ x)-f(x)\|_p}{\ln(n+1)\omega_p(f,\ \frac{2\pi}{n+1})}\leq\frac{1}{\pi^2}+O(\frac{1}{\ln(n+1)}). \tag{5}$$

证　当$f\in C_{2\pi}$时, 由〔4〕知$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi[f(x+t)+f(x-t)](\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}})^2dt$.

因此, $|\sigma_n(f,x)-f(x)|\leq\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}})^2dt\leq$

$\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi\omega(f,\ t)(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}})^2dt\leq\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi(\frac{n+1}{2\pi}t+1)(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}})^2\omega(f,\ \frac{2\pi}{n+1})dt=$

$\frac{1}{\pi^2}\ln(n+1)\omega(f,\ \frac{2\pi}{n+1})+O(\omega(f,\ \frac{2\pi}{n+1}))$.

由此有$\frac{\max|\sigma_n(f,\ x)-f(x)|}{\ln(n+1)\omega(f,\ \frac{2\pi}{n+1})}\leq\frac{1}{\pi^2}+O(\frac{1}{\ln(n+1)})$.

当$f\in L_{2\pi}$时, 有$\|\sigma_n(f,x)-f(x)\|_1\leq$

$$\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,dx\right)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt\le\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\omega_1(f,\ t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt\le$$

$$\frac{1}{\pi^2}\ln(n+1)\omega_1\left(f,\ \frac{2\pi}{n+1}\right)+O\left(\omega_1\left(f,\ \frac{2\pi}{n+1}\right)\right).$$

于是引理得证.

系　当$X=C_{2\pi}$或$L_{2\pi}$时，有

$$A_n(\alpha)_X=\frac{\alpha}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right). \tag{6}$$

证　当$X=C_{2\pi}$，取$f(x)=|x|$（$|x|\le\pi$）时$f\in H^1_X$，此时有

$$\sigma_n(|x|,\ 0)-|0|=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}2|t|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt=\frac{2}{\pi^2}\frac{\ln(n+1)}{n+1}+O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\frac{\sigma_n(|x|,\ 0)-|0|}{\ln(n+1)\omega\left(|x|,\frac{2\pi}{n+1}\right)}=\frac{1}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right).$$

所以

$$A_n(1)_C\ge\frac{1}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right). \tag{7}$$

由（5）与（7），得$A_n(1)_C=\frac{1}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)$.当$X=L_{2\pi}$，由〔5〕已有

$$\sup_{f\in H^1_X}\|\sigma_n(f,\ x)-f(x)\|_L=\frac{2}{\pi}\frac{\ln(n+1)}{n+1}+O\left(\frac{1}{n+1}\right). \tag{8}$$

由（5）与（8），证得（6）当$X=L_{2\pi}$时成立.

定理2　当$\alpha>0$，$X=L_{2\pi}$或$C_{2\pi}$时，有

$$A_n^*(\alpha)_X=\alpha A_n^*(1)_X+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)=\frac{\alpha}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right). \tag{9}$$

证　第一个等式的证明和定理1类似．又由引理2知

$$A_n^*(1)_X\le\frac{1}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)\text{，但}A_n^*(1)_X\ge A_n(1)_X=\frac{1}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right),$$

所以$A_n^*(1)_X=\frac{1}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)$．于是定理得证.

二　设$f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$在单位圆$|z|<1$内解析，在$|z|\le1$上连续，记它的连续模和光滑模分别为

$$\omega(f,\ \delta)=\max\{|f(z_1)-f(z_2)|:|z_1|\le1,\ |z_2|\le1,\ |z_1-z_2|\le\delta\}$$

和$\omega^*(f,\delta)=\max\left\{\left|f(z_1)+f(z_2)-2f\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right|:|z_1|\le1,|z_2|\le1,\ |z_1-z_2|\le2\delta\right\}$.

当$\omega(f,\ \delta)\le\delta$时，称$f(z)\in H^1$，当$\omega^*(f,\ \delta)\le2\delta$时，称$f(z)\in H^2$.

记$g(\theta)=f(e^{i\theta})=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_ke^{ik\theta}$.

那么，$|f(e^{i(\theta+h)})+f(e^{i(\theta-h)})-2f(e^{i\theta})|\le$

$|f(e^{i(\theta+h)})+f(e^{i(\theta-h)})-2f(e^{i\theta}\cosh)|+2|f(e^{i\theta})-f(e^{i\theta}\cosh)|\leq$
$\omega^*(f,\ h)+2\omega(f,\ 2\sin\frac{2h}{2})\leq\omega^*(f,\ h)+2\omega(f,\ \frac{h^2}{2})$，即

$\omega^*(g,\ h)\leq\omega^*(f,\ \delta)+2\omega(f,\ \frac{\delta^2}{2})$。因此，由引理1得证下列引理3．

引理3　当$a>0$时，有

$$\max_\theta|g(\theta)-a_n^a(g,\ \theta)+[L_n^a]_1 i(n+1)\int_0^1[g(\theta+\frac{t}{n+1})-g(\theta-\frac{t}{n+1})]dt|=$$
$$O(\omega^*(f,\ \frac{1}{n+1})+\omega(f,\ \frac{1}{(n+1)^2})). \tag{10}$$

定理3　设$a>0$，$f(z)\in H^2$，那末

$$A_n(a)_z=aA_n(1)_z+O(\frac{1}{\ln(n+1)}). \tag{11}$$

其中$A_n(a)_z=\sup\limits_{\substack{f\in H^2\\ f\neq const}}\dfrac{\max\limits_{|z|\leq1}|\sigma_n^a(f,\ z)-f(z)|}{\ln(n+1)\omega(f,\ \frac{1}{n+1})}$．

证　由引理3，有$\max\limits_\theta|g(\theta)-\sigma_n^a(g,\ \theta)|=[L_n^a]_1(n+1)\max\limits_\theta|\int_0^1[g(\theta+\frac{t}{n+1})-$
$g(\theta-\frac{t}{n+1})]dt|+O(\omega^*(f,\ \frac{1}{n+1})+\omega(f,\ \frac{1}{(n+1)^2}))$．

由上式和定理1类似可证本定理．

定理4　当$a>0$时，有

$$A_n(a)_z=\frac{2a}{\pi}+O(\frac{1}{\ln(n+1)}) \tag{12}$$

证　当$a=1$，$z=re^{i\theta}$时，由〔4〕有$\sigma_n(f,z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i(\theta-\varphi)})K_n(r,\ \varphi)d\varphi$，
其中$K_n(r,\ \varphi)=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{\sin\frac{n}{2}(\varphi-\psi)}{\sin\frac{(\varphi-\psi)}{2}}\right)^2K(r,\ \psi)d\psi$，$K(r,\ \psi)=\dfrac{1-r^2}{2(1-2r\cos\psi+r^2)}$．

所以$\sigma_n(f,\ z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i(\theta-\varphi)})\left[\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{\sin\frac{n}{2}(\varphi-\psi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}\right)^2K(r,\ \psi)d\psi\right]d\varphi=$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K(r,\ \psi)\left\{\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi\left[f(e^{i(\theta-\psi+\xi)})+f(e^{i(\theta-\psi-\xi)})\right]\left(\dfrac{\sin\frac{n\xi}{2}}{\sin\frac{\xi}{2}}\right)^2d\xi\right\}d\psi$

由卜阿松积分知$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i(\theta-\psi)})K(r,\ \psi)d\psi$．从而

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K(r,\ \psi)\left\{\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi 2f(e^{i(\theta-\psi)})\left(\frac{\sin\frac{n\xi}{2}}{\sin\frac{\xi}{2}}\right)^2d\xi\right\}d\psi.$$

所以，当$|z|<1$时

$|\sigma_n(f,z)-f(z)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K(r,\psi)\left\{\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi|f(e^{i(\theta-\psi+\xi)})+f(e^{i(\theta-\psi-\xi)})-\right.$

$$2f(e^{i(\theta-\varphi)}) \mid \left(\frac{\sin\frac{n\zeta}{2}}{\sin\frac{\zeta}{2}}\right)^2 d\zeta\} \quad d\psi \le \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\omega(f, \zeta)\left(\frac{\sin\frac{n\zeta}{2}}{\sin\frac{\zeta}{2}}\right)^2 d\zeta \le$$

$\frac{2}{\pi}\ln(n+1)\omega(f, \frac{1}{n+1}) + O(\omega(f, \frac{1}{n+1}))$ 由此有

$$\sup_{\substack{f\in H^2\\ f\neq \text{const}}}\left\{\frac{\max\limits_{|z|\le 1}|\sigma_n(f, z)-f(z)|}{\ln(n+1)\omega(f, \frac{1}{n+1})}\right\} \le \frac{2}{\pi}+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right).$$

用此式和定理3，证得定理。

参考文献

〔1〕孙永生，关于Cesaro算子的逼近常数，数学学报，24：4(1981)，516—537.

〔2〕李训经，蔡查罗求和法在巴拿赫空间，数学学报，10：1(1960)，41—54.

〔3〕邹悦等，连续函数用它的蔡查罗平均数来匀逼，复旦大学数学论文集，上海科学技术出版社（1960），468—471.

〔4〕Titchmarsh, E.C.，函数论，人民教育出版社.

〔5〕Никольский С. М., Изв АНСССР, сер матем, 10(1946), 207—256.

On Cesaro means of Fourier Series and Power Series

Liu Liwan （刘丽婉）

Abstract

Let $f(x)$ be a periodic function of period 2π, $|f(x)|$ and $|f(x)|^p$ integrable on $[0, 2\pi]$. It is said to be $f\in H^1_X$, if $\left(\int_0^{2\pi}|f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}\le |h|$. It is said to be $f\in H^2_X$, if $\left(\int_0^{2\pi}|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|^p dx\right)^{1/p}\le 2|h|$.

Asumme that the series

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1}$$

is Fourier series of $f(x)$ and the conjugate series of (1) is

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\sin kx-b_k\cos kx). \tag{2}$$

Let $\sigma_n^a(f, x)$ and $\sigma_n^a(\tilde{f}, x)$ be Cesaro means of (1) and (2)、In this note, we geve a simple proof of the result of Sun[1] and the following theorems.

Theorem Let $a>0$, $X=L_{2\pi}$ or $C_{2\pi}$, and

$$A_n(a)_X=\sup_{\substack{f\in H^1_X\\ f\neq\text{const}}}\frac{\|\sigma_n^a(f, x)-f(x)\|_p}{\ln(n+1)\omega_p(f, \frac{2\pi}{n+1})},$$

then

$$A_n(a)=aA_n(1)+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)=\frac{a}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right).$$

Theorem Let $a>0$, $X=L_{2\pi}$ or $C_{2\pi}$, and

$$A_n^*(a)_X = \sup_{\substack{f \in H: \\ f \neq \text{const}}} \frac{\|\sigma_n^a(f, x) - f(x)\|_p}{\ln(n+1)\omega_p(f, \frac{2\pi}{n+1})}$$

then $A_n^*(a)_X = aA_n^*(1)_Z + O(\frac{1}{\ln(n+1)}) = \frac{a}{\pi^2} + O(\frac{1}{\ln(n+1)})$.

Further, we discussed the approximation of analytic function by Cesaro means of its power series.

仿S-闭空间的半正则化*

陈 仪 香

（徐州师范学院）

如果拓扑空间（X，$\mathscr{T}$）的每个正则开集都是某些正则闭集之并，则称拓扑空间（X，$\mathscr{T}$）为弱P_Σ-型的[3]．显然极不连通空间、P_Σ-型空间[1]、正则空间、几乎正则空间都是弱P_Σ-型的．

定理 设（X，$\mathscr{T}$）为弱P_Σ-型的仿S-闭空间[2]．则它的半正则化（X，$\mathscr{T}_*$）是仿紧空间．

证明 设$\mathscr{U}$为（X，$\mathscr{T}^{-0}$）的汪一开复盖，由于$\mathscr{T}^{-0}$为（X，$\mathscr{T}_*$）的拓扑基，所以$\mathscr{U}$中任一元都是X中若干个正则开集的并，所以由$\mathscr{U}$可得X的正则开集的复盖$\mathscr{V}$．又（X，$\mathscr{T}$）是弱P_Σ-型的，从而对于$\mathscr{V}$中的任一元都是某些正则闭集并，由$\mathscr{V}$可得到（X，$\mathscr{T}$）的正则闭复盖$\mathscr{W}$，而（X，$\mathscr{T}$）是仿S-闭的，所以$\mathscr{W}$有局部有限的加细正则闭复盖$\mathscr{H}$，又（X，$\mathscr{T}$）的每个正则闭集都是（X，$\mathscr{T}_*$）中的正则闭集．$\forall x \in X$，x有$\mathscr{T}$-开邻域V仅与$\mathscr{H}$中有限个正则闭集的交非空．这时x的$\mathscr{T}_*$—开邻域V^{-0}也仅与$\mathscr{H}$中有限个正则闭集的交非空．事实上，使$P \in \mathscr{H}$且$V \cap P = \phi$，因为P是正则闭集．$\therefore P = P^{0-}$．由$V \cap P = \phi$得$V \cap P^0 = \phi$．但P^0是开集，所以$V^- \cap P^0 = \phi$．由此得$V^{-0} \cap P^0 = \phi$．再由V^{-0}是开集即得$V^{-0} \cap P = V^{-0} \cap P^{0-} = \phi$．所以$\mathscr{H}$为（X，$\mathscr{T}_*$）中的局部有限复盖．由$\mathscr{H}$的取法可知$\mathscr{H}$加细于$\mathscr{U}$，所以（X，$\mathscr{T}_*$）是仿紧空间．

推论 极不连通（P_Σ-型、正则、几乎正则）的仿S-闭空间的半正则化是仿紧的．

参 考 文 献

〔1〕王国俊，S-闭空间的性质，数学学报，Vol.24，1(1981)，55～63．

〔2〕陈必胜，仿S-闭空间，数学研究与评论，Vol.5，3(1985)，1～10．

〔3〕Takashi Noiri, A note on S-closed spaces, Bull. Inst. Math. (Academia Sinica, Taibei), Vol.12, No.3 (1984), 229～235.

* 1986年1月8日收到．