奇异摄动线性控制系统的能观性和能抗干扰性*

张 伟 江 马 晓 云
(上海交通大学) (上海七〇八研究所)

一、前 言

在实际控制问题中我们常常会遇到这样的情况：该控制系统中某些状态变化很快，而另一些状态变化都很慢．它们的数学模型往往具有如下的形式：

$$\Sigma_\varepsilon: \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 u,\quad \varepsilon\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2 u,\quad y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \qquad (1)$$

其中ε为正的小参数，x_1、x_2和u分别是n_1，n_2和r维向量，y为k维向量，A_{ij}、B_i、C_i $(i, j = 1,2)$分别为相应的系数矩阵．

按照Chow-Kokotovic分解[1]，系统（1）的快、慢变子系统分别是：

$$\Sigma_f: \varepsilon\dot{x}_f = A_{22}x_f + B_2 u_f,\quad y_f = C_2 x_f \qquad (2)$$

和 $$\Sigma_s: \dot{x}_s = A_0 x_s + B_0 u_s,\quad y_s = C_0 x_s + D_0 u_s, \qquad (3)$$

其中，
$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21},\qquad B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$$
$$C_0 = C_1 - C_2 A_{22}^{-1}A_{21},\qquad D_0 = -C_2 A_{22}^{-1}B_2\ .$$

近年来，许多学者从事于研究全系统Σ_ε和其子系统Σ_s与Σ_f性能之间的关系．其中M．Suzukl和M．Mlura[2]，J．H．Chow和P．V．Kokotovic[3,4]，J．H．Chow[6]都讨论了全系统的稳定性与子系统稳定性之间的联系．1975年P．V．Kokotovic和A．H．Haddad对A_{ij}，B_i，C_i $(i, j = 1,2)$都是常数矩阵的控制系统Σ_ε得到如下结论[7]：如果A_{22}^{-1}存在，且$\mathrm{rank}[B_0, A_0B_0, \cdots, A_0^{n_1-1}B_0] = n_1$，$\mathrm{rank}[B_2, A_{22}B_2, \cdots, A_{22}^{n_2-1}B_2] = n_2$，那末存在$\varepsilon^* > 0$，对任意的$\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$，系统$\Sigma_\varepsilon$都是能控的．之后，对$A_{ij} = A_{ij}(\varepsilon)$，$B_i = B_i(\varepsilon)$，$C_i(\varepsilon)$ $(i,j = 1,2)$的情况，J．H．Chow在1977年除了得到与上面结论类似的结果，还建立了强能控的概念，并有以下结论[8]：系统(Σ_ε)强能控的充分必要条件是其子系统Σ_s和Σ_f是能控的．同年，P．Sannuti对A_{ij}，B_i，C_i $(i, j = 1,2)$都是t的函数的情况得到了更一般的结果[9]：假设A_{ij}，B_i $(i, j = 1,2)$是时间t的二阶连续可微函数，对每一个固定的t，$A_{22}(t)$可逆．那末，对充分小的ε，全系统Σ_ε在以下两个条件成立时是能控的：（1）简化系统$x_s = A_0x_s + B_0u_s$是能控的，（2）边界层系统$dx_f/d\tau = A_{22}x_f + B_2u_f$是能控的．（其中$\tau = t/\varepsilon$）

但是，对能观性和能抗干扰性的讨论还未见文，本文就这二方面作一讨论．

二、奇异摄动线性控制系统的能观性

首先，由线性控制系统的对偶原理[10]，我们可以建立以下定理：

定理1 对确定线性系统Σ_ε而言：

（1），子系统Σ_f的对偶系统Σ_f^*就是全系统Σ_ε的对偶系统Σ_ε^*按Chow-Kokotovic分离法所

* 1982年9月15日收到．

得到的快变子系统．

（2）．子系统Σ_s的对偶系统Σ_s^*就是全系统Σ_ε的对偶系统Σ_ε^*按Chow－Kokotovic分离法所得到的慢变子系统．

证明　由文献〔10〕，我们知道Σ_ε的对偶系统是：

$$\Sigma_\varepsilon^*:\quad \dot{\psi}=-\psi A_{11}-\xi A_{21}-\eta C_1,\ \varepsilon\dot{\xi}=-\psi A_{12}-\xi A_{22}-\eta C_2,\ \varphi=\psi B_1+\xi B_2, \tag{4}$$

其中（ψ，$\varepsilon\xi$）是$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$的对偶状态，而对偶关系式是：

$$\left[\left(\psi(T),\varepsilon\xi(T)\right)\begin{pmatrix}x_1(T)\\x_2(T)\end{pmatrix}-\left(\psi(t_0),\varepsilon\xi(t_0)\right)\right]\begin{pmatrix}x_1(t_0)\\x_2(t_0)\end{pmatrix}=\int_{t_0}^{T}\left[\varphi(\tau)u(\tau)-\eta(\tau)y(\tau)\right]d\tau$$

根据Chow－Kokotovic分离法，我们对Σ_ε^*进行快、慢变模型的分离：

令（4）中$\varepsilon=0$，则有

$$\dot{\bar{\psi}}=-\bar{\psi}A_{11}-\bar{\xi}A_{21}-\bar{\eta}C_1 \tag{5}$$

$$O=-\bar{\psi}A_{12}-\bar{\xi}A_{22}-\bar{\eta}C_2 \tag{6}$$

$$\bar{\varphi}=\bar{\psi}B_1+\bar{\xi}B_2. \tag{7}$$

当A_{22}非异时，

$$\bar{\xi}=-\bar{\psi}A_{12}A_{22}^{-1}-\bar{\eta}C_2A_{22}^{-1}. \tag{8}$$

将（8）代入（5）式，则有

$$\dot{\bar{\psi}}=-\bar{\psi}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})-\bar{\eta}(C_1-C_2A_{22}^{-1}A_{21}),$$

$$\bar{\varphi}=\bar{\psi}(B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2)+\bar{\eta}(-C_2A_{22}^{-1}B_2).$$

记：$\psi s=\bar{\psi}$，$\varphi s=\bar{\varphi}$，$\eta s=\bar{\eta}$，则可得到Σ_ε^*的慢变子系统是

$$\dot{\psi}_s=-\psi_sA_0-\eta_sC_0,\qquad \varphi_s=\psi_sB_0+\eta_sD_0. \tag{9}$$

假定在很短的瞬间，慢变量皆是常数，则有：

$$\varepsilon(\dot{\xi}-\dot{\bar{\xi}})=-\psi A_{12}-\xi A_{22}-\eta C_2=-\psi A_{12}-(\xi-\bar{\xi})A_{22}-\bar{\xi}A_{22}-\eta C_2=-(\xi-\bar{\xi})A_{22}-(\eta-\bar{\eta})C_2.$$

令$\xi_f=\xi-\bar{\xi}$，$\eta_f=\eta-\bar{\eta}$，那末可得Σ_ε^*的快变子系统是

$$\varepsilon\dot{\xi}_f=-\xi_fA_{22}-\eta_fC_2,\quad \varphi_f=\xi_fB_2. \tag{10}$$

于是将（9），（10）与Σ_s的对偶系统Σ_s^*：$\dot{\psi}_s=-\psi_sA_0-\eta_sC_0$，$\varphi_s=\psi_sB_0+\eta_sD_0$以及$\Sigma_f$的对偶系统$\Sigma_f^*$：$\varepsilon\dot{\xi}_f=-\xi_fA_{22}-\eta_fC_2$，$\varphi_f=\xi_fB_2$相比较，即知本定理成立．

根据对偶系统之间的完全能观性和完全能控性的等价转化[10]，我们即有以下结论：

定理2　如果A_{ij}，B_i，C_i（$i,j=1,2$）都为常数矩阵，A_{22}非异，Σ_f和Σ_s完全能观．那末存在$\varepsilon^*>0$，对所有的$\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$，全系统$\Sigma_\varepsilon$都是完全能观的．

证明　因为Σ_s完全能观，故Σ_s^*完全能控．同样由Σ_f完全能观，即知Σ_f^*完全能控．

从而存在$\varepsilon^*>0$，对所有的$\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$，$\Sigma_\varepsilon^*$完全能控，即$\Sigma_\varepsilon$完全能观．

据据同样道理，还可以得到：

定理3　若A_{ij}，B_i，C_i（$i,j=1,2$）都是与ε有关的矩阵，A_{22}非异，且Σ_s、Σ_f对一切ε都完全能观．那末存在常数$\varepsilon^*>0$，使得全系统Σ_ε对所有的$\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$都是完全能观的．

定理4　系统Σ_ε强能观（即指，$\varepsilon\to0$时系统Σ_ε仍然保持它的能观性）的充分必要条件是Σ_s和Σ_f都能观．

定理5　如果A_{ij}，B_i，C_i（$i,j=1,2$）都是t的二阶连续可微函数，对每一个固定的t，A_{22}

可逆．那末对充分小的ε，全系统Σ_ε在以下两个条件成立时是能观的：

（1）简化系统$x_s = A_0(t)x_s + B_0(t)u_s$，$y_s = C_0(t)x_s + D_0(t)u_s$能观．

（2）边界层系统$dx_f/d\tau = A_{22}(t)x_f + B_2(t)u_f$，$y_f = C_2(t)x_f$能观．$(\tau = t/\varepsilon)$．

三、奇异摄动线性控制系统的能抗干扰性

以下仅就线性定常系统作讨论，并且认为干扰是任意形式的．首先我们建立以下结论：

定理6 设已给线性定常控制系统：

$$\Sigma:\ x = Ax + Bu, \qquad y = Cx + Du \tag{11}$$

那末该系统的能抗干扰性在非异的坐标变换下保持不变．

证明 系统（11）能抗任意形式的干扰的充分必要条件是：

$$D = 0 \qquad \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} B = 0$$

在非异坐标变换 $x = T\tilde{x}$ $(|T| \neq 0)$ 之下，（11）变为：

$$\dot{\tilde{x}} = (T^{-1}AT)\tilde{x} + T^{-1}Bu,\ \ y = CT\tilde{x} + Du \tag{12}$$

易证，对（12）同样有

$$D = 0 \quad 和 \quad \begin{pmatrix} CT \\ CT(T^{-1}AT) \\ \vdots \\ CT(T^{-1}AT)^{n-1} \end{pmatrix} (T^{-1}B) = 0$$

故本结论成立．

一般说来，我们考虑如下形式的控制系统：

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 f, \quad \varepsilon\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2 f \tag{13}$$

$$y = C_1x_1 + C_2x_2 \tag{14}$$

其中，f是任意形式的干扰，A_{22}为稳定矩阵，其余变量假设如前．引入坐标变换：

$$\eta = (I_{n_1} - \varepsilon HL)x_1 + (-\varepsilon H)x_2,\ \ \xi = Lx_1 + I_{n_2}x_2, \tag{15}$$

其中L、H满足：

$$A_{22}L - A_{21} - \varepsilon L(A_{11} - A_{12}L) = 0,\ \ HA_{22} = A_{12} - \varepsilon HLA_{12} + \varepsilon(A_{11} - A_{12}L)H. \tag{16}$$

若设$L = L_0 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)$，$H = H_0 - \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2)$，则经摄动分析后的计算可知：

$$L_0 = A_{22}^{-1}A_{21}, \qquad L_1 = A_{22}^{-2}A_{21}A_0,$$

$$H_0 = A_{12}A_{22}^{-1}, \qquad H_1 = A_{12}A_{22}^{-2}A_{21}A_{12}A_{22}^{-1} + A_0A_{12}A_{22}^{-2}.$$

在变换（15）之下，系统（13）、（14）变成了：

$$\Sigma^T:\quad \begin{aligned} \dot{\eta} &= \mathscr{A}_0\eta + \mathscr{B}_0 f \\ \varepsilon\dot{\xi} &= \mathscr{A}_2\xi + \mathscr{B}_2 f \\ y &= \mathscr{C}_0\eta + \mathscr{C}_2\xi \end{aligned} \tag{17}$$

其中，$\mathscr{A}_0 = A_{11} - A_{12}L$，$\mathscr{B}_0 = B_1 - \varepsilon HLB_1 - HB_2$，$\mathscr{A}_2 = A_{22} + \varepsilon LA_{12}$，

$\mathscr{B}_2 = B_2 + \varepsilon LB_1$，$\mathscr{C}_2 = C_1 - C_2L$，$\mathscr{C}_2 = C_2 + \varepsilon(C_1 - C_2L)H$．

对系统（17）而言，运用奇异摄动法我们可以有：

定理 7 假设系统Σ^T的按照Chow－Kokotovic分离法得到的快、慢变子系统是Σ_f^T和Σ_s^T，并且Σ_f^T和Σ_s^T能抗任意形式的干扰．那末系统Σ^T输出中受干扰f的影响仅为$O(\varepsilon)$．

证明 若设：

$$\mathscr{A}_0=\mathscr{A}_0^{(0)}+\varepsilon_0\mathscr{A}_0^{(1)}+O(\varepsilon^2),\quad \mathscr{B}_0=\mathscr{B}_0^{(0)}+\varepsilon\mathscr{B}_0^{(1)}+O(\varepsilon^2),\quad \mathscr{C}_0=\mathscr{C}_0^{(0)}+\varepsilon\mathscr{C}_0^{(1)}+O(\varepsilon^2)$$

$$\mathscr{A}_2=\mathscr{A}_2^{(0)}+\varepsilon\mathscr{A}_2^{(1)}+O(\varepsilon^2),\quad \mathscr{B}_2=\mathscr{B}_2^{(0)}+\varepsilon\mathscr{B}_2^{(1)}+O(\varepsilon^2),\quad \mathscr{C}_2=\mathscr{C}_2^{(0)}+\varepsilon\mathscr{C}_2^{(1)}+O(\varepsilon^2)$$

则有：$\mathscr{A}_0^{(0)}=A_0,\quad \mathscr{A}_2^{(0)}=A_{22},\quad \mathscr{B}_0^{(0)}=B_0,\quad \mathscr{B}_2^{(0)}=B_2,\quad \mathscr{C}_0^{(0)}=C_0,\quad \mathscr{C}_2^{(0)}=C_2,$

$$\mathscr{A}_0^{(1)}=-A_{12}A_{22}^{-2}A_{21}A_0,\quad \mathscr{A}_2^{(1)}=A_{22}^{-1}A_{21}A_{12},\quad \mathscr{B}_0^{(1)}=-A_{12}A_{22}^{-2}A_{21}B_1-H_1B_2,$$

$$\mathscr{B}_2^{(1)}=A_{22}^{-1}A_{21}B_1,\quad \mathscr{C}_0^{(1)}=-C_2A_{22}^{-2}A_{21}A_0,\quad \mathscr{C}_2^{(1)}=(C_1-C_2A_{22}^{-1}A_{21})A_{12}A_{22}^{-1}.$$

于是Σ^T的慢变子系统是：

$$\Sigma_s^T:\quad \dot{x}_s=A_0x_s+B_0f,\quad y_s=C_0x_s+\hat{D}_0f,$$

而Σ^T的快变子系统是

$$\Sigma_f^T:\quad \varepsilon\dot{x}_f=A_{22}x_f+B_2f,\quad y_f=C_2x_f,$$

由于Σ_s^T和Σ_f^T能抗任意形式的干扰，所以

$$C_0A_0^kB_0=0,\quad C_2A_{22}^kB_2=0\quad (k=-1,\ 0,1,2\cdots).$$

再设$\eta(t)=\eta_0(t)+\varepsilon\eta_1(t)+O(\varepsilon^2),\ \xi(t/\varepsilon)=\xi_0(t/\varepsilon)+\varepsilon\xi_1(t/\varepsilon)+O(\varepsilon^2)$，

则 $$y=C_0\eta_0(t)+C_2\xi(t/\varepsilon)+O(\varepsilon).$$

而$\dot{\eta}_0(t)=A_0\eta_0(t)+B_0f(t),\ \dot{\xi}_0(\tau)=A_{22}\xi_0(\tau)+B_2f(0)\ (\tau=t/\varepsilon)$，

故 $$\eta_0(t)=e^{A_0t}\eta_0(0)+\int_0^t e^{A_0(t-s)}B_0f(s)\,ds,$$

$$\xi_0(t/\varepsilon)=e^{A_{22}t/\varepsilon}\xi_0(0)+\int_0^{t/\varepsilon}e^{A_{22}(t/\varepsilon-s)}B_2f(0)\,ds.$$

于是，$y=C_0e^{A_0t}\eta_0(0)+C_2e^{A_{22}t/\varepsilon}\xi_0(0)+O(\varepsilon)$，即本定理成立．

根据定理 6 我们即有以下结论：

定理 8 对奇异摄动线性定常系统（13）、（14）而言，如果其快、慢变子系统都能抗任意形式的干扰．那末全系统（13）、（14）受该干扰的影响以$O(\varepsilon)$量级出现．

本文得到了许可康同志热情的指教和帮助．作者表示衷心的感谢．

参 考 文 献

〔1〕Chow, J.H.& Kokotovic, P.V., IEEE T-AC. Vol.21, No.5, pp701-705 (1976)

〔2〕Suzuki M& Miura M., IEEE T-AC. Vol.21, No.1, pp123-124 (1976)

〔3〕Chow, J.H.& Kokotovic, P.V. IEEE T-AC, Vol.23, No.3 (1978)

〔4〕Chow, J.H.& Kokotovic, P.V. SIAM J. Contr, Optimiz, Vol.16 (1978)

〔5〕Chow, J.H., J. Franklin Inst. Vol.306 (1978)

〔6〕Suzukl, M., IEEE T-AC. Vol.26, No.2. pp505－507 (1981)

〔7〕Kokotovic, P.V.& Hadad, A.H., IEEE T-AC. Vol.20, No.1, pp111—113 (1975)

〔8〕Chow, J.H., INT.J.CONTROL, Vol.25, No.5, pp697-704 (1977)

〔9〕Sannuti, P., IEEE T-AC, Vol.22, No.4, pp622-624 (1977)

〔10〕韩京清，线性控制系统的对偶性，《数学年刊》Vol.1 第1期pp37—40 (1980)