四阶非线性抛物方程解之存在性*

张　功　安
（吉林大学）

四阶椭圆方程解之极值原理最先由Dunninger，D.R．提出[1]．Goyal，V．B．和Singl，K．P．推广到半线性方程的情形[2]，文献〔5〕、〔6〕作进一步的推广，都对文献〔3〕的某些结论作了修正，并且都建立了四阶椭圆方程边值问题解的存在性定理．关于四阶抛物方程解的极值原理及唯一性定理作者作过讨论[7]．这篇短文研究四阶非线性抛物方程的初值问题和混合问题解的存在性，其前提是所有解的最大模有一致先验的上界．

我们讨论的框架是在Nikol′skii空间中进行的，因此我们先引进该空间的有关结论．n-维欧氏空间$\mathbf{R}^n$中的点（$x_1,\cdots,x_n$）记为x，Ω是$\mathbf{R}^n$中的有界域，Γ是Ω的边界，$\bar{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$，$Q_T=\Omega\times(0,T]$，$\Sigma_T=\Gamma\times(0,T]$，$D^T_{n+1}=\mathbf{R}^n\times(0,T]$，$D^m_t$，$D^l_x$分别表示偏微商$\frac{\partial^m}{\partial t^m}$和$\frac{\partial^l}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$，其中$\alpha_k(k=1,\cdots,n)$是非负整数且$l=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$．

设l，m是二非负整数，α和β是小于1的正数，我们称有界连续函数$u(x,t)\in H^{l+\alpha,m+\beta}(\bar{D}^T_{n+1})$，如果所有$D^l_xu(x,t)$和$D^m_tu(x,t)$都存在且分别对$x$和$t$满足以$\alpha$和$\beta$为指标的一致Hölder条件，亦即有有限半模

$$\langle u\rangle^{D^T_{n+1}}_{l+\alpha,m+\beta}=\langle u\rangle^{D^T_{n+1}}_{l+\alpha,0}+\langle u\rangle^{D^T_{n+1}}_{0,m+\beta}. \tag{1}$$

式中

$$\langle u\rangle^{D^T_{n+1}}_{l+\alpha,0}=\sum_l\sup_{\substack{x\neq y\\0<t<T}}\frac{|D^l_xu(x,t)-D^l_xu(y,t)|}{|x-y|^{\alpha}}, \tag{2}$$

$$\langle u\rangle^{D^T_{n+1}}_{0,m+\beta}=\sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n,\,t\neq\tau\\0<t,\tau<T}}\frac{|D^m_tu(x,t)-D^m_tu(x,\tau)|}{|t-\tau|^{\beta}} \tag{3}$$

在空间$H^{l+\alpha,m+\beta}(\bar{D}^T_{n+1})$中定义模

$$\|u\|^{D^T_{n+1}}_{l+\alpha,m+\alpha}=\sup_{D^T_{n+1}}|u(x,t)|+\langle u\rangle^{D^T_{n+1}}_{l+\alpha,m+\beta}. \tag{4}$$

类似地可以定义$u\in H^{l+\alpha,m+\beta}(\bar{Q}_T)$与模$\|u\|^{Q_T}_{l+\alpha,m+\beta}$：

引理1　（Nikol′skii嵌入定理）若非负整数l_0，m_0满足$\kappa=1-\frac{l_0}{l+\alpha}-\frac{m_0}{m+\beta}>0$，并使$l_1=\kappa(l+\alpha)$与$m_1=\kappa(m+\beta)$均不是整数，则对于任一$u(x,t)\in H^{l+\alpha,m+\beta}(\bar{D}^T_{n+1})$，

*1982年11月16日收到．

$D_x^{l_0} u(x,t)$ 恒存在且属于 $H^{l_1, m_1}(\bar{D}_{n+1}^T)$，此外成立不等式

$$\langle D_x^{l_0} D_t^{m_0} u \rangle_{l_1, m_1}^{D_{n+1}^T} \leq C \langle u \rangle_{l+\alpha, m+\beta}^{D_{l+1}^T}, \tag{5}$$

其中 C 是依赖于 $l, m, \alpha, \beta, l_0, m_0, n$ 和 T 的常数.

以后我们都认为 Ω 的边界 Γ 充分光滑. 如果 Ω 是 $l+\alpha$ 类区域时，上述嵌入定理对空间 $H^{l+\alpha, m+\beta}(\bar{Q}_T)$ 也成立.

我们要用的是 $m+\beta = \frac{1}{2}(l+\alpha)$ 情形的Nikol'skli空间 $H^{l+\alpha, (l+\alpha)/2}(\bar{D}_{n+1}^T)$ 和 $H^{l+\alpha, (l+\alpha)/2}(\bar{Q}_T)$，这两空间简记为 $H^{l+\alpha, (l+\alpha)/2}$ 并略去半模或模的上标 D_{n+1}^T 和 Q_T.我们有

引理 2 （插值不等式）若 $u \in H^{l+\alpha, (l+\alpha)/2}$ 则 $u \in H^{r, r/2}$ 且

$$\langle u \rangle_{r, r/2} \leq \text{coust}\,(\langle u \rangle_{l+\alpha, (l+\alpha)/2}^{r/(l+\alpha)} \langle u \rangle_0^{1-r/(l+\alpha)} + (1+T^{-r/2}) \langle u \rangle_0),$$

$$0 < r < l+\alpha. \tag{6}$$

右端的常数与 l, α, r, n（及 Ω 的边界 Γ 的光滑性）有关. 当 r（或 $r/2$）是整数时 $\langle u \rangle_{r,0} = \sup|D_x u|$（或 $\langle u \rangle_{0, r/2} = \sup|D_t^{r/2} u|$），当 r（或 $r/2$）非整数时 $\langle u \rangle_{r,0}$（或 $\langle u \rangle_{0, r/2}$）与前面（2）(或（3）) 相同，特别 $\langle u \rangle_0 = \sup|u|$.

现在我们考虑非线性抛物方程的初值问题.

在区域 D_{n+1}^T 中，我们考虑下列两个线性抛物算子

$$\mathscr{L}^{(\mu)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\mu)}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{\mu}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c^{(\mu)}(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} \quad (\mu = 1, 2), \tag{7}$$

系数满足条件

$$a_{ij}^{(1)}(x,t),\ b_i^{(1)}(x,t),\ c^{(1)}(x,t) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\bar{D}_{n+1}^T); \tag{8}$$

$$a_{ij}^{(2)}(x,t),\ b_i^{(2)}(x,t),\ c^{(2)}(x,t) \in H^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\bar{D}_{n+1}^T), \tag{9}$$

且对任意实向量 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 和 $(x,t) \in \bar{D}_{n-1}^T$ 成立抛物性条件

$$A^{(\mu)} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\mu)}(x,t) \xi_i \xi_j \leq B^{(\mu)} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ B^{(\mu)} > A^{(\mu)} > 0\ (\mu = 1, 2). \tag{10}$$

函数 $f = f(x, t, u, D_x u, D_x^2 u, D_x^3 u, D_t u)$ 关于 $D_x^{\nu} u$ ($\nu = 0, 1, 2, 3, D_x^0 u = u$) 和 $D_t u$ 的微商记为 $f_{D_x^{\nu}}$ 和 f_{D_t}.

关于函数 $f(x, t, u, D_x u, D_x^2 u, D_x^3 u, D_t u)$，我们要求它对变量 x 和 t 分别满足以 α 和 $\alpha/2$ 为指标的一致Hölder条件，对于其它变量是连续可微的，而 f 和它微商满足如下的增长阶条件：不等式

$$|f| \leq C(1 + |D_x u|^{4+\alpha-\varepsilon} + |D_x^2 u|^{(4+\alpha-\varepsilon)/2} + |D_t u|^{(4+\alpha-\varepsilon)/2} + |D_x^3 u|^{(4+\alpha-\varepsilon)/3}), \tag{11}$$

$$|f_{D_x^{\nu}}| \leq C(1 + |D_x u|^{4-\nu-\varepsilon} + |D_x^2 u|^{(4-\nu-\varepsilon)/2} + |D_t u|^{(4-\nu-\varepsilon)/2} + |D_x^3 u|^{(4-\nu-\varepsilon)/3}),$$

$$(\nu = 0, 1, 2, 3), \tag{12}$$

$$|f_{D_t}| \leq C(1 + |D_x u|^{2-\varepsilon} + |D_x^2 u|^{(2-\varepsilon)/2} + |D_t u|^{(2-\varepsilon)/2} + |D_x^3 u|^{(2-\varepsilon)/3}) \tag{13}$$

于所有 $(x,t)\quad \bar{D}^T_{n+1}\ \sup\limits_{D'_{n+1}} |u(x,t)|\le M$及任意$D_xu$, D_x^2u, D_x^3u, D_tu和任意满足$1>\varepsilon>0$的ε成立．此处和以后用C表示常数，在不同的场合有可能是不同的常数．

定理 1 假设算子 $\mathscr{L}^{(1)}$、$\mathscr{L}^{(2)}$及函数$f(x,t,u,D_xu,D_x^2u,D_x^3u,D_tu)$ 满足条件（8）—（13），函数$g(x)\in C^{4+\alpha}(\mathbf{R}^n)$，$h(x)\in C^{2+\alpha}(\mathbf{R}^n)$，如果含参数$\tau$（$0\le\tau\le1$）的初值问题族

$$\mathscr{L}^{(2)}(\mathscr{L}^{(1)}u)+\tau f(x,t,u,D_xu,D_x^2u,D_x^3u,D_tu)=0 \text{ 于 } D^T_{n+1}\text{中}, \quad (14)$$

$$u|_{t=0}=\tau g(x),\quad \mathscr{L}^{(1)}u|_{t=0}=\tau h(x) \quad \text{于 } \mathbf{R}^n\text{中} \quad (15)$$

的所有可能解的最大模以增长阶条件中所出现的常数M为界，则初值问题

$$\mathscr{L}^{(2)}(\mathscr{L}^{(1)}u)+f(x,t,u,D_xu,D_x^2u,D_x^3u,D_tu)=0 \text{ 于 } D^T_{n+1}\text{中}, \quad (16)$$

$$u|_{t=0}=g(x),\quad \mathscr{L}^{(1)}u|_{t=0}=h(x) \quad \text{于 } \mathbf{R}^n\text{中} \quad (17)$$

至少有一属于$H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$的解.

证明 我们定义如下的三个变换:

T_1: $\quad H^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})\to H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{D}^T_{n+1})$，

即对于$w(x,t)\in H^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\bar{D}_{n+1})$，定义$T_1w=F(x,t)\equiv f(x,t,w,D_xw,D_x^2w,D_x^3w,D_tw)$．

T_2: $\quad H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{D}^T_{n+1})\to H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$，

即对于给定的$F(x,t)$，由线性方程的初值问题

$$\mathscr{L}^{(2)}v=-F(x,t) \text{ 于 } D^T_{n+1}\text{中}, \quad v|_{t=0}=h(x) \text{ 于 } \mathbf{R}^n\text{中}$$

所确定的唯一解 v 定义变换$v=T_2F(x,t)$;

T_3: $\quad H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})\to H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$，

即对于给定的 v 由线性抛物方程初值问题

$$\mathscr{L}^{(1)}u=v \text{ 于 } D^T_{n+1}\text{中}, \quad u|_{t=0}=g(x) \text{ 于 } \mathbf{R}^n\text{中}$$

的唯一解 u 确定变换$u=T_3v$.

从我们关于f的假设条件和二阶线性抛物方程初值问题解之Schauder型先天估计，容易知道算子T_1, T_2, T_3均是有界算子，事实上，其有界性分别从下面证明的（22）及（22）和（23）之间的两个估计式即可看出，因而其合成算子$T=T_3T_2T_1$是一个从$H^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$到$H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$的有界算子，由此可见也是$H^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$到自身的紧算子．

所要证明的结论可以归结为算子T在空间$H^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$中存在不动点．按照Schaefer不动点定理（参看文献〔4〕p.133）为此只须证明T是连续的，而且集合

$$S=\{u\in H^{3+\alpha,(3-\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})\,|\,u=\tau Tu, 0\le\tau\le1\} \quad (18)$$

有界．

设$\{w_j\}$是$H^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$中收敛于$w$的任一叙列$\|w_j-w\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/2}\to0$，当$j\to\infty$时．令$u_j=Tw_j$，由于$\{w_j\}$是空间$H^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$中有界叙列及算子$T$的有界性，易见$\{u_j\}$是$H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$中有界叙列，根据Alzerla定理可知在$\{u_j\}$中存在子叙列$\{u_{h_j}\}$按$H^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$模收敛于元素$u\in H^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})$．利用取极限过程我们得到$u=Tw$，再根据二阶线性抛物方程初值问题解之唯一性定理可推出$\|u_j-u\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/2}\to0$，当$j\to\infty$，这证明了$T$的连续性．

剩下证明集合S的有界性，为此我们先对量$\langle F\rangle_{a,0}$和$\langle F\rangle_{0,a/2}$进行估计．对于$u\in S$，u是初值问题（14)(15）的解，按假设有$\sup\limits_{D^T_{n+1}}|u(x,t)|\leq M$．注意到

$$\langle F(x,t)\rangle_{a,0}\leq\sup_{\substack{x\neq y\\0<t<T}}\frac{|f(x,t,u(x,t),\cdots,D_tu(x,t))-f(y,t,u(x,t),\cdots,D_tu(x,t))|}{|x-y|^a}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{3}\sup_{\substack{x\neq y\\0<t<T}}|\tilde f_{D^\nu_x}|\frac{|D^\nu_xu(x,t)-D^\nu_xu(y,t)|}{|x-y|^a}+\sup_{\substack{x\neq y\\0<t<T}}|\tilde f_{D_t}|\frac{|D_tu(x,t)-D_tu(y,t)|}{|x-y|^a},$$

因而我们可以利用关于f对变量x和t满足指标分别是a和$a/2$的Hölder条件的假设及f的微商的增长阶条件（12)(13）对上式右端进行估计得到

$$\langle F(x,t)\rangle_{a,0}\leq C\{1+\sum_{\nu=0}^{3}(\sum_{k=1}^{3}\langle D^k_xu\rangle_0^{(4-\nu-\varepsilon)/k}+\langle D_tu\rangle_0^{(4-\nu-\varepsilon)/2})\langle D^\nu_xu\rangle_{a,0}$$

$$+(\sum_{k=1}^{3}\langle D^k_xu\rangle_0^{(2-\varepsilon)/k}+\langle D_tu\rangle_0^{(2-\varepsilon)/2})\langle D_tu\rangle_{a,0}\},$$

其中我们把f对x和t的Holder半模归并到括号的第一项中．应用Nikoi′skii嵌入定理对$\langle D^\nu_xu\rangle_{a,0}$和$\langle D_tu\rangle_{a,0}$进行估计且使用插值不等式可得如下的估计

$$\langle F(x,t)\rangle_{a,0}\leq C\{1+\sum_{k=1}^{3}(\sum_{k=1}^{3}\langle D^k_xu\rangle_0^{(4-\nu-\varepsilon)/k}+\langle D_tu\rangle_0^{(4-\nu-\varepsilon)/2})\langle u\rangle_{\nu+a,(\nu+2)/2}$$

$$+(\sum_{k=1}^{3}\langle D^k_xu\rangle_0^{(2-\varepsilon)/k}+\langle D_tu\rangle_0^{(2-\varepsilon)/2})\langle u\rangle_{2+a,(2+a)/2}\}$$

$$\leq C\{1+\sum_{\nu=0}^{3}\sum_{k=1}^{3}[\langle u\rangle_{4+a,(4+a)/2}^{k/(4+a)}\langle u\rangle_0^{1-k/(4+a)}+\langle u\rangle_0]^{(4-\nu-\varepsilon)/k}\langle u\rangle_{\nu+a,(\nu+a)/2}\}.$$

再利用插值不等式估计$\langle u\rangle_{\nu+a,(\nu+a)/2}$，并据Young不等式$ab\leq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$及$\langle u\rangle_0\leq M$我们得到估计式

$$\langle F(x,t)\rangle_{a,0}\leq C\{1+\langle u\rangle_{4+a,(4+a)/2}^{1-\varepsilon/(4+a)}\}. \tag{19}$$

同理可证

$$\langle F(x,t)\rangle_{0,a/2}\leq C\{1+\langle u\rangle_{4+a,(4+a)/2}^{1-\varepsilon/(4+a)}\}. \tag{20}$$

利用增长阶条件（11）和插值不等式（6）作上面相同的推导可得

$$\langle F(x,t)\rangle_0\leq C\{1+\sum_{k=1}^{3}\langle D^k_xu\rangle_0^{(4+a-\varepsilon)/k}+\langle D_tu\rangle^{(4+a-\varepsilon)/2}\}$$

$$\leq C\{1+\sum_{k=1}^{3}[\langle u\rangle_{4+a,(4+a)/2}^{k/(4+a)}\langle u\rangle_0^{1-k/(4+a)}+\langle u\rangle_0]^{(4+a-\varepsilon)/k}\}\leq C\{1+\langle u\rangle_{4+a,(4+a)/2}^{1-\varepsilon/(4+a)}\}. \tag{21}$$

联合估计式（19)(20)(21）即得

$$\|F(x,t)\|_{a,a/2}\leq C\{1+\langle u\rangle_{4+a,(4+a)/2}^{1-\varepsilon/(4+a)}\}. \tag{22}$$

又根据二阶线性抛物方程初值问题解的Schauder型先天估计及解之正则性定理我们有

$$\|u\|_{4+a,(4+a)/2}\leq C(\|v\|_{2+a,(2+a)/2}+\|\tau g\|_{4+a});$$

$$\|v\|_{2+a,(2+a)/2}\leq C(\tau\|F\|_{a,a/2}+\|\tau h\|_{2+a}),$$

其中 $\|g\|_{4+\alpha}$ 和 $\|h\|_{2+\alpha}$ 分别表空间 $C^{4+\alpha}(\mathbf{R}^n)$ 和 $C^{2+\alpha}(\mathbf{R}^n)$ 中的模．把后一式代入前一式右端，并利用估计式（22）我们得到

$$\|u\|_{4+\alpha,(4+\alpha)/2}\leq C_T(1+\|u\|^{1-\varepsilon/(4+\alpha)}_{4+\alpha,(4+\alpha)/2}) \tag{23}$$

这里把 $\|g\|_{4+\alpha}$ 和 $\|h\|_{2+\alpha}$ 归并到（23）右端第一项．由此可知 $\|u\|_{4+\alpha,(4+\alpha)/2}\leq M_1$，$\forall u\in S$，从而 $\|u\|_{3+\alpha,(3+\alpha)/2}\leq M_2$，$\forall u\in S$，其中 M_1、M_2 是与 u 无关的常数．S有界得证，定理证毕．

最后我们考虑下列非线性抛物方程的混合问题

$$\mathscr{L}^{(2)}(\mathscr{L}^{(1)}u)+f(x,t,u,D_xu,D_x^2u,D_x^3u,D_tu)=0\ \text{于}Q_T\text{中}, \tag{23}$$

$$u|_{\Sigma T}=\varphi(x,t),\quad \mathscr{L}^{(1)}u|_{\Sigma T}=\psi(x,t)\ \text{在}\Sigma_T\text{上}, \tag{24}$$

$$u|_{t=0}=g(x),\quad \mathscr{L}^{(1)}u|_{t=0}=h(x)\ \text{在}\Omega\text{上}, \tag{25}$$

其中 $\varphi(x,t)\in H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\Sigma_T)$，$\psi(x,t)\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Sigma_T)$，$g(x)\in C^{4+\alpha}(\bar{\Omega})$，$h(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$；关于 $\mathscr{L}^{(\mu)}(\mu=1,2)$ 的系数满足以空间 $H^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\bar{Q}_T)$ 代替 $H^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\bar{D}^T_{n+1})(l=2,1)$ 的条件（8）和（9）；对函数 $f(x,t,u,D_xu,D_x^2u,D_x^3u,D_tu)$ 除了 (x,t) 限制在 $\bar{Q}_T$ 外满足定理1所述的相同的增长阶条件（11）—（13）．此外，我们假定满足下列的相容性条件

$$\varphi(x,0)=g(x),\quad \psi(x,0)=h(x); \tag{26}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(1)}(x,0)\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i^{(1)}(x,0)\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}+c^{(1)}(x,0)g(x)-h(x); \tag{27}$$

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{i,j=1}^n a^{(2)}(x,0)\frac{\partial^2 v(x,0)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b^{(2)}(x,0)\frac{\partial v(x,0)}{\partial x_i}+c^{(2)}(x,0)v(x,0)+f\left(x,0,g(x),D_xg(x),D_x^2g(x),D_x^3g(x),\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}\right), \tag{28}$$

其中

$$v(x,0)=\sum_{i,j=1}^n a^{(1)}(x,0)\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b^{(1)}(x,0)\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}+c^{(1)}(x,0)g(x)+c^{(1)}(x,0)g(x)-\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,0). \tag{29}$$

定理2　在前述的假设下，如果含参数 τ（$0\leq\tau\leq1$）的混合问题族

$$\mathscr{L}^{(2)}(\mathscr{L}^{(1)}u)+\tau f(x,t,u,D_xu,D_x^2u,D_x^3u,D_tu)=0\ \text{于}Q_T\text{中} \tag{30}$$

$$u|_{\Sigma T}=\tau\varphi(x,t),\quad \mathscr{L}^{(1)}u|_{\Sigma T}=\tau\psi(x,t)\ \text{于}\Sigma_T\text{上} \tag{31}$$

$$u|_{t=0}=\tau g(x),\quad \mathscr{L}^{(1)}u|_{t=0}=\tau h(x) \tag{32}$$

的所有解的最大模以增长阶中的 M 为上界．则混合问题（23)(24)(25）在空间 $H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\bar{Q}_T)$ 中至少存在一解．

此定理的证明与定理1的证明相仿，只须用二阶线性抛物方程混合问题解之Schauder型先天估计及解之存在唯一性定理和正则性定理代替初值问题的相同结论即可．

参 考 文 献

〔1〕Dunninger, D.R., Maximum principle for solutions of some fourth-order elliptic equations, J.Math.Anal.Appl., 37(1972), 655-658.

〔2〕Goyal, V.B. and Singh, K.P., Maximum principle for a certain class of semi-linear elliptic partial differential e ations, J.Math. Anal.Appl., 69(1979), 1－7.

〔3〕Ладыженская, О.А., Солонников, В.А., Уральцева, П.Н., Линейные и квази-линейные уравнения параболичeскоро типа., 《наука》, Москва, 1967.

〔4〕Cronin, J., Fixed points and topological degree in nonlinear analysis, Math.Surveys No.11, Amer.Math.Soc., (1 1).

〔5〕王俊禹，非线性四阶椭圆边值问题解的存在性定理，吉林大学自然科学学报（待发表）.

〔6〕严子谦，关于某些四阶椭圆方程的一个注记．数学物理学报，1984年第四期，399－406.

〔7〕张功安，四阶抛物偏微分方程解的极值原理，吉林大学自然科学学报，第四期（1982），1－5.

The Existence of Solutions of The Nonlinear Fourth-order Parabolic Equations

Zhang Gongan

(Depart of Mathematics, Jilin University)

Adstract

In this note, initial value problems (16)(17) and mixed boundary value problems (23)(24)(25) bor non-linear parabolic equations are discurred. By means of the schauder type estimates of the linear parabolic equtions and the embedding theorem in Nikol′skii spaces, we show that these problems have Aolutions in the space $H^{4-\alpha,\frac{4-\alpha}{2}}(\bar{D}^T_{n+1})(H^{4-\alpha,\frac{4-\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$