EPG方法和CNPG方法的分析和改进*

闫光杰　马驷良
（吉林银行学校）（吉林大学）

K. W. Morton 和A. K. Parrott[1]对于一个空间变量的双曲方程，应用Petrov-Galerkin方法，从所谓“单位CFL性质”出发提出了EPG方法和CNPG方法。本文分析了这两种方法在精度和稳定性方面的某些不足，在〔1〕的基础上进一步改进检验函数的选取，达到了最佳精度，改善了稳定性条件，并可简化双曲方程组的计算。

§1. EPG方法和CNPG方法的分析和改进

文〔1〕基于简单对流方程初值问题

(1.1)　$u_t = au_x$，$u(x,0) = u_0(x)$，a——常数，

的真解$u(x,t) = u_0(x+at)$沿特征传播的性质，时间方向采取Euler法离散，构造广义Galerkin方程

(1.2)　$\langle U^{n+1} - U^n - a\Delta t\,\partial_x U^n,\ \psi_i\rangle = 0$（所有$i$），

其中$\langle , \rangle$表L_2内积，$\psi_i = \psi_i(x)$是检验函数，$U^n(x) = \sum_j U_j^n \varphi_j(x)$，$\varphi_j(x) = \varphi(x/h - j)$是试探函数，$\varphi(s)$是“山函数”：

(1.3)　$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 - |s|, & s\in[-1,1], \\ 0, & \text{别处}. \end{cases}$$

文〔1〕提出在选取ψ_i时满足“单位CFL性质”，即：首先选取x_i^+，使当$\mu = a\Delta t/h = 1$（当$a>0$）时方程$\langle U^{n+1} - U^n - h\partial_x U^n,\ x_i^+\rangle = 0$的解在网点上与真解相同，然后在（1.2）中令$\psi_i = (1-\nu)\varphi_i + \nu x_i^+$，从而当$\nu = \mu = 1$时，（1.2）的解便与真解在网点上相同。对于（1.2），文〔1〕导出最简单的$x_i^+ = x(x/h - i)$，其中

(1.4)　$$x(s) = \begin{cases} 4 - 6s, & s\in[0,1], \\ 0, & \text{别处}. \end{cases}$$

这样，方程（1.2）写成

(1.5)　$\langle U^{n+1} - U^n - a\Delta t\,\partial_x U^n,\ (1-\nu)\varphi_i + \nu x_i^+\rangle = 0$，所有$i$，称之为EPG方法，它可以写成差分格式

(1.6)　$[1 + \frac{1}{6}(1+\nu)\delta^2](U_j^{n+1} - U_j^n) = \mu\Delta_0 U_j^n + \frac{1}{2}\mu\nu\delta^2 U_j^n$，其中$\Delta_0 U_j = \frac{1}{2}(U_{j+1} - U_j)$，$\delta^2 U_j = U_{j-1} - 2U_j + U_{j-1}$．（1.6）的稳定性条件是

(1.7)　$0 \le a\Delta t/h = \mu \le \nu \le 1$，

$\nu \ne \mu$时一阶精度，$\nu = \mu$时二阶精度．

* 1982年12月11日收到．

如果时间方向用 Grank-Nicolson 型方法离散，得到广义 Galerkin 方程

(1.8) $\langle U^{n+1}-U^n-a\Delta t(\theta\partial_x U^{n+1}+(1-\theta)\partial_x U^n),\ (1-\nu)\varphi_i+\nu x_i^+\rangle=0,$

此时，由“单位 CFL 性质”推出 $x(s)=\begin{cases}2(2-3\theta)-6(1-2\theta)s, & s\in[0,1],\\ 0, & \text{别处},\end{cases}$

当$\theta=0$，(1.8)即 (1.5)．当$\theta=\frac{1}{2}$，(1.8)可写成格式

(1.9) $[1+\frac{1}{2}\nu\Delta_0+\frac{1}{6}(1+\frac{1}{2}\nu)\delta^2](U_j^{n+1}-U_j^n)=\frac{1}{2}\mu(\Delta_0+\frac{1}{2}\nu\delta^2)(U_j^{n+1}+U_j^n),$

若$\nu=0$，(1.9) 即Keller的“box格式”，当$\nu=1$，便是 Crank-Nicolson 方法，它们都是二阶精度绝对稳定的格式．当 $0<\nu<1$，(1.9) 仍二阶精度，但是只对$\mu\geq 0$稳定．事实上，易算出 (1.9) 的增长因子为

$$\lambda(\xi)=[1-(4c_2+2\mu\nu)\sin^2\frac{\xi}{2}+i(\mu-c_1)\sin\xi][1-4c_2\sin^2\frac{\xi}{2}-ic_1\sin\xi]^{-1},$$

其中$c_1=\frac{1}{2}(\mu-\nu)$，$c_2=\frac{1}{6}(1-\nu)+\frac{1}{4}\nu(1-\mu)$．令$y=\sin^2\frac{\xi}{2}$，则

$$|\lambda(\xi)|^2=\{[1-(4c_2+2\mu\nu)y]^2+(\mu-c_1)^2 4y(1-y)\}[(1-4c_2y)^2+4c_1^2y(1-y)]^{-1}$$

因此易证 $|\lambda(\xi)|^2\leq 1$ 等价于

$$[1-(4c_2+2\mu\nu)y]^2-(1-4c_2y)^2+[(\mu-c_1)^2-c_1^2]4y(1-y)\leq 0$$

进一步等价于

(1.10) $$\mu\nu(1-\nu)\geq 0,$$

由此不难看出我们的结论．特别$\nu=\mu^2$，(1.9) 是三阶精度，〔1〕中称之为 CNPG 方法，稳定性条件是

(1.11) $$0\leq\mu\leq 1.$$

EPG 和 CNPG 方法，固然如文〔1〕所分析，在色散误差和精度方面较好于 Lax-Wendroff 格式．但是我们认为：第一，这两个方法是形如

(1.12) $a_1U_{j+1}^{n+1}+a_0U_j^{n+1}+a_{-1}U_{j-1}^{n+1}=p_1U_{j-1}^n+p_0U_j^n+p_{-1}U_{j-1}^n$

的六点稳格式（而 Lax-Wendroff 格式，$a_1=a_{-1}=0$），这种稳格式可以达到更高的精度和更弱的色散、耗散误差（最高可达四阶精度），而 EPG 最高是二阶精度．也可证明 CNPG最高是三阶精度（即便在 (1.8) 中$\theta\neq\frac{1}{2}$也如此），另外，如按下文 (1.15)′ 选取ψ_i（θ任意）所得到的 EPG Ⅱ型方法，也可证明其精度不超过三阶．这说明文〔1〕中建立的两层方法并未达到可能的最佳精度．虽然文〔1〕利用时间方向的跳蛙 (leap frog) 法离散构造了四阶精度方法，但已经是三层方法了．第二，它们的稳定性条件都限制$\mu\geq 0$（对于$a<0$时，要相应改变 (1.5) 和 (1.8) 中的$\psi_i=(1-\nu)\varphi_i+\nu x_i^-$，$x_i^-=x(i-x/h)$），这种稳定性对于推广到方程组

(1.13) $u_t=Au_x$，　A一对称常矩阵

是很不方便的．例如，文〔1〕推广 EPG 方法于 (1.13) 得到方程

(1.14) $$\langle U^{n+1}-U^n-\Delta tA\partial_xU^n,\ \varphi_ie_{(r)}\rangle+\frac{\Delta t}{h}\langle U^{n+1}-U^n,\ \sigma_i\tilde{A}e_{(r)}\rangle$$

$$-\frac{\Delta t^2}{h}\langle A\partial_xU^n,\ \tau_iAe_{(r)}\rangle,\ r=1,\cdots,m,\ \text{所有}\ i,$$

其中$\sigma_i=\frac{1}{2}(x_i^+ + x_i^-)-\varphi_i$，$\tau_i=\frac{1}{2}(x_i^+ - x_i^-)$，$\widetilde{A}=S|\Lambda|S^T$，$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=S^TAS$，$|\Lambda|=\mathrm{diag}(|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_m|)$，$e_{(r)}$是第$r$个坐标为1的单位向量，S是由A的正规直交特征向量作成的正交矩阵．显然（1.14）依懒于矩阵S．文〔1〕注意到了这个明显的缺点，采取的修改方法是选取更复杂的检验函数

(1.15) $\psi_{i(r)}=(1-\mu_r^2)\varphi_i+\frac{1}{2}\mu_r^2(x_i^+ + x_i^-)+\frac{1}{2}\mu_r(x_i^+ - x_i^-)$，其中$\mu_r=\lambda_r\Delta t/h$．得到与S无关的方法

(1.16) $$\langle U^{n+1}-U^n-\Delta tA\partial_xU^n,\ \varphi_ie_{(r)}\rangle+\frac{\Delta t^2}{h^2}\langle U^{n+1}-U^n,\ \sigma_iA^2e_{(r)}\rangle$$
$$=\frac{\Delta t^2}{h}\langle A\partial_xU^n,\ \tau_iAe_{(r)}\rangle,$$ $r=1,\cdots,m$，所有i，称之为EPG Ⅱ方法．它是三阶精度，稳定性条件是$|\mu_r|\le1$（即A的谱半径$\rho(A)\le h/\Delta t$），对于方程（1.1），(1.15)即

(1.15)′ $$\psi_i=(1-\mu^2)\varphi_i+\frac{1}{2}\mu^2(x_i^+ + x_i^-)+\frac{1}{2}\mu(x_i^+ - x_i^-).$$

EPG和CNPG的这种稳定性看来是由于选取ψ_i时只要求单侧满足“单位CFL性质”(即当$\nu=\mu=1$时，近似解与真解在网点上相同）所引起的．本文中基于上述分析，首先简单选取

(1.17) $$\psi_i=\frac{1-\beta}{2}x_i^-+\frac{1+\beta}{2}x_i^+,$$

其中$\beta\in[-1,1]$，当$\beta=\mu$时，如此的ψ_i双侧满足“单位CFL性质”($\mu=1$或$\mu=-1$时，近似解与真解在网点上都相同)，以此构造了包含CPG Ⅱ方法在内的稳定性条件较好的格式，它们可平行地推广到方程组（1.13）.有趣的是，Lax-Wendroff等显格式也作为这种格式的特例而得到(§2)．最后(§3)，通过选取φ_i和（1.17）的组合作为ψ_i

(1.18) $$\psi_i=(1-\mu^2)\varphi_i+\mu^2\left(\frac{1-\beta}{2}x_i^-+\frac{1+\beta}{2}x_i^+\right)$$

（类似（1.15)′的取法）构造了一类稳定性条件较好的三阶格式（也包含EPG Ⅱ)，而在最简单情形（$\beta=0$）得到了四阶精度绝对稳定的格式（从而用线性元达到了最佳精度)，并把它们平行地推广到方程组（1.13）.

§2．双侧“CFL 性质”

我们在（1.8)中按（1.17）选取ψ_i，得到方程

(2.1) $$\langle U^{n+1}-U^n-a\Delta t(\theta\partial_xU^{n+1}+(1-\theta)\partial_xU^n),\ \frac{1-\beta}{2}x_i^-+\frac{1+\beta}{2}x_i^+\rangle=0,$$

与此相应的差分格式为

(2.2) $$\left[1+\frac{1}{2}\theta(1-\beta\mu)\delta^2+\theta(\beta-\mu)\Delta_0\right](U_j^{n+1}-U_j^n)=\mu\Delta_0U_j^n+\frac{1}{2}\beta\mu\delta^2U_j^n.$$

易验证，若使（2.2）具二阶精度，只需

$$\mu(\beta-\mu)(1-2\theta)=0$$

因此，或$\beta=\mu$，或$\theta=\frac{1}{2}$．为使（2.2）具三阶精度，当且仅当$\beta=\mu,\theta=\frac{1}{3}$，格式为

(2.3) $$\left[1+\frac{1}{6}(1-\mu^2)\delta^2\right](U_j^{n+1}-U_j^n)=\mu\Delta_0U_j^n+\frac{1}{2}\mu^2\delta^2U_j^n.$$

这恰是EPG Ⅱ方法，它只是把EPG方法（1.6)(当$\nu=\mu$）左端的$1-\mu$换成$1-\mu^2$，便提高一阶精度，且改善了稳定性条件．一般地，当$\beta=\mu$，(2.2)是二阶精度格式

(2.4) $$\left[1+\frac{1}{2}\theta(1-\mu^2)\delta^2\right](U_j^{n+1}-U_j^n)=\mu\Delta_0U_j^n+\frac{1}{2}\mu^2\delta^2U_j^n,$$

当$\theta=\frac{1}{2}$，$x(s)$取分段常数，(2.2)成为

(2.5) $$\left[1+\frac{1}{4}(1-\beta\mu)\delta^2+\frac{1}{2}(\beta-\mu)\Delta_0\right](U_j^{n+1}-U_j^n)=\mu\Delta_0U_j^n+\frac{1}{2}\beta\mu\delta^2U_j^n,$$

特别，当$\beta=1$ 或 -1 时，(2.5) 即 "box 格式"，当$\beta=0$，即Crank-Nicolson 型格式．

为导出（2.2）的稳定性条件，注意δ^2,Δ_0的F氏变换分别是$2(\cos\xi-1)$和$i\sin\xi$，（2.2）的增长因子为

$$\lambda(\xi)=1+\frac{i\mu\sin\xi+\beta\mu(\cos\xi-1)}{1-\theta(1-\beta\mu)(\cos\xi-1)+i\theta(\beta-\mu)\sin\xi}$$

$$|\lambda(\xi)|^2=\frac{[1-2\theta(1-\beta\mu)y-2\beta\mu y]^2+4[\mu+\theta(\beta-\mu)]^2y(1-y)}{[1-2\theta(1-\beta\mu)y]^2+4\theta^2(\beta-\mu)^2y(1-y)}$$

（其中仍令 $y=\sin^2\frac{\xi}{2}$），从而 $|\lambda(\xi)|^2\le 1$ 等价于

(2.6) $$(1-2\theta)\mu[\mu(\beta^2-1)y+\mu-\beta]y\le 0,$$

由此可见，$\theta=\frac{1}{2}$时，即（2.5）绝对稳定，无耗散误差．当$\beta=\mu$时，（2.6）等价于

(2.7) $$(1-2\theta)\mu^2(\mu^2-1)\le 0.$$

于是，格式（2.4）当$\theta<\frac{1}{2}$（包括格式（2.3））时的稳定性条件为$|\mu|\le 1$，而当$\theta>\frac{1}{2}$时，稳定性条件是$|\mu|\ge 1$．由于格式（2.4），(2.5）的稳定性不限制$\mu\ge 0$．因此可直接推广到方程组（1.13），得到

(2.8) $$\left[I+\frac{\theta}{2}\left(I-\frac{\Delta t^2}{h^2}A^2\right)\delta^2\right](U_j^{n+1}-U_j^n)=\frac{\Delta t}{h}A\Delta_0U_j^n+\frac{1}{2}\frac{\Delta t^2}{h^2}A^2\delta^2U_j^n,$$

(2.9) $$\left[I+\frac{1}{4}\left(I-\frac{\Delta t}{h}BA\right)\delta^2+\frac{1}{2}\left(B-\frac{\Delta t}{h}A\right)\Delta_0\right](U_j^{n+1}-U_j^n)=\frac{\Delta t}{h}A\Delta_0U_j^n+\frac{\Delta t}{2h}BA\delta^2U_j^n.$$

（其中矩阵$B=f(A)$可以是A的任何多项式），而相应的精度和稳定条件不变，例如，（2.9）绝对稳定，(2.8）当$\theta<\frac{1}{2}$时稳定性条件是$\frac{\Delta t}{h}\rho(A)\le 1$等等．自然，我们也可如（1.16）那样写出与（2.8），(2.9）相应的广义 Galerkin 方法：

(2.8)′ $$\langle U^{n+1}-U^n-\Delta tA[\theta\partial_xU^{n+1}+(1-\theta)\partial_xU^n],\ [\tfrac{1}{2}(x_i^++x_i^-)+\tfrac{\Delta t}{h}\tau_iA]e_{(r)}\rangle=0,$$

(2.9)′ $$\langle U^{n+1}-U^n-\tfrac{1}{2}\Delta tA\partial_x(U^{n+1}+U^n),\ [\tfrac{1}{2}(x_i^++x_i^-)+\tau_iB]e_{(r)}\rangle=0,\quad r=1,\cdots,m,$$

所有i．

本节末尾指出，在（2.2）中令$\theta=0$，使得到显式差分格式，特别，当$\beta=\mu$便是Lax-Wendroff 格式．

§3．高精度格式

由§2易见，按（1.17）选取ψ_i具有计算简单，稳定条件好，便于推广的优点，但所得方法最高也只能是三阶精度，因此自然提出问题：使用线性元的广义Galerkin方法是否可构造出精度最佳的两层差分格式，回答是肯定的．我们按（1.18）选取ψ_i，便得到方法

(3.1) $$\langle U^{n+1}-U^n-a\Delta t[\theta\partial_xU^{n+1}+(1-\theta)\partial_xU^n],\ (1-\mu^2)\varphi_i+\frac{\mu^2}{2}(x_i^++x_i^-)+\frac{\beta\mu^2}{2}\tau_i\rangle=0$$

以及相应的差分格式

(3.2) $$\left\{1+\left[\frac{1}{6}(1-\mu^2)+\frac{1}{2}\theta\mu^2(1-\beta\mu)\right]\delta^2-\theta\mu(1-\beta\mu)\Delta_0\right\}(U_j^{n+1}-U_j^n)$$
$$=\mu\Delta_0U_j^n+\frac{1}{2}\mu^2\beta\mu\delta^2U_j^n,$$

易见，当$\beta\mu=1$，(3.2）便是EPGⅡ方法（2.3）（此时θ可任意，但为简便取$\theta=0$为宜）．当$\theta=\frac{1}{2}$，$\beta=0$，（3.2）便是绝对稳定的四阶格式

(3.3) $$\left[1+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}\mu^2\right)\delta^2-\frac{1}{2}\mu\Delta_0\right](U_j^{n+1}-U_j^n)=\mu\Delta_0U_j^n.$$

仿§ 2 易证，格式（3.2）稳定的充要条件是

$$\beta\mu\mu^2(1-\mu^2)\leq 0, \tag{3.4}$$

因此，只要选取$\beta\mu>0$，所得格式的稳定性条件为$|\mu|\leq 1$．特别，取$\beta\mu=l\geq 0$（l是常数），便得

$$\{1+\frac{1}{6}[1+\frac{1}{2}(1-3l)\mu^2]\delta^2+\frac{1}{2}(l-1)\mu\Delta_0\}(U_j^{n+1}-U_j^n)=\mu\Delta_0U_j^n+\frac{1}{2}l\mu^2\delta^2U_j^n. \tag{3.5}$$

而且可直接推广到方程组（1.13）得到

$$\{I+\frac{1}{6}[I+\frac{1}{2}(1-3l)\frac{\Delta t^2}{h^2}A^2]\delta^2+\frac{1}{2}(l-1)\frac{\Delta t}{h}A\Delta_0\}(U_j^{n+1}-U_j^n)=\frac{\Delta t}{h}A\Delta_0U_j^n+\frac{l\Delta t^2}{2h^2}A^2\delta^2U_j^n, \tag{3.6}$$

也不难写出相应的广义 Galerkin 方法。

最后指出，我们可以按文〔2〕讨论上述诸方法的色散、耗散误差．从中易见，格式（2.3）和（4.2）在色散、耗散误差方面也较EPG和CNPG为好．

综上，从双侧“单位CFL性质”出发所得到的方法以及相应的广义 Galerkin 方法，不仅具有计算简单，稳定条件好，便于推广等优点，而且可以得到精度高、色散、耗散误差小的格式，因此较之从单侧“单位CFL性质”出发构造方法更为可取．

参 考 文 献

〔1〕K. W. Morton and A. K. Parrott, Generalized galerkin methods for first-order hyperbolic equations, J. Comp. phys. Vol. 36 (1980), 249 —270 .

〔2〕R. F. Warming and B.J. Hyett, The modified equationn approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods, J. Comp. phys. 14 (1974) .

Analysis and Improuement of EPG and CNPG Methods

Yan Kuangje　　Ma Siliang

(Jilin Bank School)　(Jilin University)

Using Petrov-Galerkin technique for first-order hyperbolic equations from so-call “unit CFL property”, K. W. Morton and A. K. Parrott [1] Presented EPG and CNPG methods and so on. In this Paper some shortcomings on the accuracy and stability of those two methods mentioned above are analyzed. By changing choice of test function we have given a scheme with the best accuracy, improved stability conditions, and simplified calculation of hyperbolic equation system.