1986年10月

数学研究与评论
第六卷 第四期

关于线性模型中误差方差估计中心极限定理余项的非一致性估计*

侯 波

（中国科技大学）

一、引 言

考虑线性回归模型

$$y_j = x'_j\beta + e_j \qquad j=1,2,\cdots n \tag{1}$$

试验点列 $\{x_j\}$ 为一列已知的 p 维向量，β 为未知的回归系数向量，$\{e_j\}$ 为一列独立的试验误差，满足条件

$$Ee_j = 0;\quad \mathrm{Var}\, e_j = \sigma^2,\ j=1,2,\cdots \tag{2}$$

误差方差 σ^2 是线性模型的一个重要的未知参数，若记

$$X_n = (x_1 \vdots x_2 \vdots \cdots \vdots x_n),\quad r_n = \mathrm{rank}\, X_n$$

$$y_{(n)} = (y_1, \cdots, y_n)',\quad e_{(n)} = (e_1, \cdots, e_n)'$$

则在（1）式的前 n 次试验的基础上，最小二乘法规定以

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-r_n} y'_{(n)}\{I - X'_n(X_nX'_n)^- X_n\} y_{(n)} = \frac{1}{n-r_n} e'_{(n)}\{I - X'_n(X_nX'_n)^- X_n\} e_{(n)} \tag{3}$$

作为 σ^2 的估计量，有 $E\hat{\sigma}_n^2 = \sigma^2$，其中 I 为单位矩阵，A^- 为矩阵 A 的任一广义逆．如所周知，方阵 $X'_n(X_nX'_n)^- X_n$ 为对称幂等方阵，其秩为 r_n，因此，（3）式可改写为

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-r_n}\left\{\sum_{j=1}^n e_j^2 - \sum_{k=1}^{r_n}\left(\sum_{j=1}^n a_{nkj} e_j\right)^2\right\} \tag{4}$$

这里 $\{a_{nkj}\}$，$j=1,2,\cdots n$，$k=1,2,,\cdots,r_n$，$n=1,2,\cdots$ 为常数，且满足 $\sum_{j=1}^n a_{nkj} a_{nlj} = \delta_{kl}$ $l, k=1,2,\cdots r_n$，$n=1,2,\cdots$．当 n 充分大时，r_n 稳定在某个值 $r \leqslant p$，因此以后只写 r 来代替（4）式中的 r_n．

若以 $G_n(x)$ 和 $\Phi(x)$ 分别记 $\hat{\sigma}_n^2$ 和标准正态的分布函数，则关于 $G_n(x)$ 收敛于 $\Phi(x)$ 的速度是人们关心的一个问题．

81年赵林城、陈希孺对于这种收敛的非一致性估计，证明了[2]：

若 $e_1, \cdots, e_n, \cdots$ 独立同分布，满足条件（2）且 $0 < Ee_i^6 < \infty$，则存在与 n 无关的常数 $c>0$，使 $|G_n(x) - \Phi(x)| \leqslant cn^{-1/2}(1+|x|)^{-3}$ 对一切 x．

之后，缪柏其证明了：

若 $e_1, e_2, \cdots e_n, \cdots$ 满足条件（2），独立同分布，且 $0 < E|e_k|^{4+2\delta} < \infty$，$0 < \delta < 1$，则

* 1983年6月27日收到．

存在函数$\psi(u)$，使当n充分大时有：$|G_n(x)-\Phi(x)|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}\psi(\sqrt{n}(1+|x|))(1+|x|)^{-(2+\delta)}$
其中$\psi(u)$为定义在$u\geqslant 0$上的有界单调减函数，$\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u)=0$．

在缪柏其进行硕士论文答辩时，导师们对于非同分布场合下的结果很感兴趣．作者对这一问题进行了探讨．

作者证明了如下的结果：

定理 设$e_1,\cdots,e_n\cdots$独立，$Ee_i=0$，$\mathrm{Var}\,e_i=\sigma^2$，且存在与$n$无关的常数$c_1>0$，$c_2>0$，使

$$\sum_{k=1}^{n}E|e_k|^{4+2\delta}\leqslant c_1 n \qquad 0<\delta\leqslant 1 \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\,e_k^2\geqslant c_2 n \tag{6}$$

则存在与n无关的常数$c>0$，使当n充分大时有$|G_n(x)-\Phi(x)|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(1+|x|)^{-(2+\delta)}$．

二、若 干 引 理

由于本文定理的证明过程较复杂，我们将证明过程中的一些主要之点提出来先加以讨论．

在下面讨论中，(a) c表示与n、x无关的常数，每次出现，即使在同一式内，也可以表示不同的数值．(b) 设$f_1(t)$、$f_2(t)$为定义于$\mathbf{R}_1$上的实变量复值函数，称$f_1\sim f_2$，若存在与n无关的$\eta>0$．$c>0$，使$\int_{|t|<\eta n^{\delta/2}}\left|\frac{f_1(t)-f_2(t)}{t}\right|dt\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}$．易证$\sim$为等价关系．(c) 以记号$\#\mathrm{A}$表示集A所包含的元素的个数．记$\hat{e}_j=e_jI(|e_j|\leqslant n^{\frac{1}{4}})$；$\xi_j=\hat{e}_j^2-E\hat{e}_j^2$；

$$\zeta_j=\left(1-\sum_{l=1}^{r}a_{nlj}^2\right)\xi_j\triangleq(1-\lambda_j)\xi_j \qquad \lambda_j=\sum_{l=1}^{r}a_{nlj}^2$$

引理1 存在与n无关的常数$\varepsilon_1<0$，$D_i>0$，$i=0,1,2$，使集合$\mathrm{A}_n=\{j:\ 1\leqslant j\leqslant n,\ 1-\lambda_j\geqslant\frac{1}{2},\ E\xi_j^2\geqslant D_0, E|e_j|^{4+2\delta}\leqslant D_1,\ a_{nlj}^2\leqslant\frac{D_2}{n},\ l=1,2,\cdots r\}$当$n$充分大时所包含的元素个数不少于$\varepsilon_1 n$．

证 $\sum\limits_{j=1}^{n}E\xi_j^2\geqslant\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{Var}\,e_j^2-\sum\limits_{j=1}^{n}E|e_j|^4I(|e_j|>n^{\frac{1}{4}})\geqslant c_2n-n^{-\frac{\delta}{2}}\sum\limits_{j=1}^{n}E|e_j|^{4+2\delta}\geqslant c_2n-c_1n^{1-\frac{\delta}{2}}$故当$n$充分大后，$c_0>0$，使

$$\sum_{j=1}^{n}E\xi_j^2\geqslant c_0 n \tag{7}$$

令$\mathrm{A}_{n1}=\{j:\ 1\leqslant j\leqslant n,\ E\xi_j^2\geqslant\frac{c_0}{2}\}$，由(7)有$\sum\limits_{j\in\mathrm{A}_{n1}}E\xi_j^2\geqslant\frac{c_0}{2}n$,有$\frac{c_0n}{2}\leqslant\sum\limits_{j\in\mathrm{A}_{n1}}E\xi_j^4\leqslant\sum\limits_{j\in\mathrm{A}_{n1}}Ee_j^4$
$\leqslant\sum\limits_{j\in\mathrm{A}_{n1}}(E|e_j|^{4+2\delta})^{\frac{4}{4+2\delta}}=(\#\mathrm{A}_{n1})\dfrac{\sum\limits_{j\in\mathrm{A}_{n1}}(E|e_j|^{4+2\delta})^{\frac{4}{4+2\delta}}}{\#\mathrm{A}_{n1}}\leqslant(\#\mathrm{A}_{n1})\left(\dfrac{\sum\limits_{j\in\mathrm{A}_{n1}}E|e_j|^{4+2\delta}}{\#\mathrm{A}_{n1}}\right)^{\frac{4}{4+2\delta}}\leqslant$
$(c_1n)^{\frac{4}{4+2\delta}}(\#\mathrm{A}_{n1})^{\frac{\delta}{2+\delta}}$．故存在$\varepsilon_0>0$，使$\#\mathrm{A}_{n1}\geqslant\varepsilon_0 n$．

令$\mathrm{A}_{n2}=\left\{j:\ 1\leqslant j\leqslant n,\ E|e_j|^{4+2\delta}\leqslant\frac{3c_1}{\varepsilon_0}\right\}$．由$\sum\limits_{j=1}^{n}E|e_j|^{4+2\delta}\leqslant c_1n$，知$\#\mathrm{A}_{n2}\geqslant(1-$

$\frac{\varepsilon_0}{3})n$. 令$A_{n3}=\{j:\ 1\leqslant j\leqslant n,\ a_{nlj}^2\leqslant\frac{4r}{n\varepsilon_0},\ l=1,2,\cdots r\}$，由$\sum\limits_{l=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{nlj}^2=r$，得$\#A_{n3}\geqslant(1-\frac{\varepsilon_0}{4})n$. 令$A_{n4}=\{j:\ 1\leqslant j\leqslant n,\ 1-\lambda_j\geqslant\frac{1}{2}\}$，由$\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j=r$，推出$\#A_{n4}\leqslant 2r$. 当$n$充分大后，有$\#A_{n1}\geqslant n-2r\geqslant(1-\frac{\varepsilon_0}{8})n$. 故当$n$充分大后，有$\#A_n=\#(A_{n1}\cap A_{n2}\cap A_{n3}\cap A_{n4})\geqslant\frac{\varepsilon_0}{8}n$. 取$D_0=\frac{c_0}{2}$，$D_1=\frac{3c_1}{\varepsilon_0}$，$D_2=\frac{4r}{\varepsilon_0}$，$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon_0}{8}$，引理 1 得证.

由于引理 1，我们可以从A_n中取出$[\sqrt{n}]$个元素组成Λ''. 令$\Lambda'=\{1,2,\cdots,n\}-\Lambda''$.

记$B_{n0}^2=\mathrm{Var}\{(n-r)(\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2)\}$；$\widetilde{B}_n^2=\sum\limits_{j=1}^{n}E\zeta_j^2$，$B_n^2=\widetilde{B}_n^2+E\left(\sum\limits_{l=1}^{r}\sum\limits_{j=k}{}'a_{nlj}a_{nlk}e_je_k\right)^2$；$B_{n1}^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Var}e_k^2$，其中$\Sigma'$表示指标在$\Lambda'$中取值，$\Sigma''$类推. $S_n=B_n^{-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\zeta_k\right)$；$S_n'=B_n^{-1}\left(\sum\limits_{k}{}'\zeta_k\right)$；$S_n''=B_n^{-1}\left(\sum\limits_{k}{}''\zeta_k\right)$；$\widetilde{L}_n=\widetilde{B}_n^{-3}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}E|\zeta_k|^3\right)$；$\Delta_n'=B_n^{-1}\left(\sum\limits_{l=1}^{r}\sum\limits_{j\neq k}{}'a_{nlj}a_{nlk}e_je_k\right)$；$\Delta_n''=2B_{n0}^{-1}\cdot\left(\sum\limits_{l=1}^{r}\sum\limits_{j}{}'a_{nlj}e_j\sum{}''a_{nlk}e_k\right)+B_{n0}^{-1}\left(\sum\limits_{l=1}^{r}\sum\limits_{j\neq k}{}''a_{nlj}a_{nlk}e_je_k\right)$. 有如下结果

引理 2 （Ⅰ）存在与n无关的$D_3>0$，$D_4>0$，使n充分大时，

$$D_3n\leqslant\widetilde{B}_n^2\leqslant B_n^2\leqslant B_{n0}^2\leqslant D_4n\ , \tag{8}$$

$$\left|\frac{\widetilde{B}_n}{B_n}-1\right|\leqslant cn^{-1}\ ,\qquad\left|\frac{B_n}{B_{n0}}-1\right|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}\ ,\qquad\left|\frac{B_{n1}}{B_{n0}}-1\right|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}, \qquad (9)(10)(11)$$

（Ⅱ）$L_n\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}$；（Ⅲ）$E\Delta_n'^2\leqslant cn^{-1}$，$E\Delta_n'^4\leqslant cn^{-\delta}$，$E|\Delta_n'|^3\leqslant cn^{-(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2})}$； (12)—(15)

（Ⅳ）$E\Delta_4''^4\leqslant cn^{-\frac{\bar{5}}{2}\delta}$，$E\Delta_n''^2\leqslant cn^{-1}$；（Ⅴ）$|ES_n'^m\Delta_n'^2|\leqslant cn^{-1}$. (16)—(18)

$|ES_n''^m\Delta_n'^2|\leqslant cn^{-1}\quad m=1,2,3,4$；（Ⅵ）$|E(S_n-\Delta_n')^3|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}$. (19)(20)

证 （Ⅰ）当$n\geqslant 4\sigma^4$时，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}e_k^2-E\xi_k^2&=Ee_k^4-E\hat{e}_k^4+((E\hat{e}_k^2)^2-\sigma^4)\geqslant Ee_k^4I(|e_k|>n^{\frac{1}{4}})-2\sigma^2Ee_k^2I(|e_k|<n^{\frac{1}{4}})\\&\geqslant(\sqrt{n}-2\sigma^2)Ee_k^2I(|e_k|>n^{\frac{1}{4}})\geqslant 0\ ,\end{aligned}$$

又
$$B_{n0}^2=\sum_{k=1}^{n}(1-\lambda_k)^2\mathrm{Var}e_k^2+E\left(\sum_{u=1}^{r}\sum_{k\neq j}{}'a_{nuk}a_{nuj}e_ke_j\right)^2+E\left(\sum_{l=1}^{r}\left(2\sum_{k}{}'a_{nlk}e_k\sum_{j}{}''a_{nlj}e_j+\sum_{k\neq j}{}''a_{nlk}a_{nlj}e_ke_j\right)\right)^2 \tag{21}$$

故当$n\geqslant 4\sigma^4$时，

$$B_{n0}^2-F^2=\sum_{l=1}^{n}(1-\lambda_l)^2(\mathrm{Var}e_l^2-E\xi_l^2)+E\left(\sum_{l=1}^{r}\left(2\sum_{k}{}'a_{nlk}e_k\sum_{j}{}''a_{nlj}e_j+\sum_{k\neq j}a_{nlk}a_{nlj}e_je_h\right)\right)^2\geqslant 0\ ,$$

所以
$$\widetilde{B}_n^2\leqslant B_n^2\leqslant B_n^2\quad ,$$

$$E\left(\sum_{l=1}^{r}\sum_{k\neq h}a_{nlk}a_{nlh}e_ke_h\right)^2\leqslant r\sum_{l=1}^{r}E\left(\sum_{k\neq h}a_{nlk}a_{nlh}e_ke_h\right)^2=2r\sum_{l=1}^{r}\sum_{k\neq h}a_{nlk}^2a_{nlh}^2Ee_k^2Ee_h^2\leqslant 2r^2\sigma^4\ ;$$

又 $0 < \mathrm{Var} e_k^2 < E e_k^4 < 1 + E|e_k|^{4+2\delta}$，取 $D_4 > (1+c_1) + 2r^2\sigma^4$，则 $B_{n0}^2 < D_4 n$．由

$$E e_k^4 < (E|e_k|^{(2+\delta)(2-\delta)\frac{2}{2-\delta}})^{1-\frac{\delta}{2}} (E|e_k|^{\delta^2\frac{2}{\delta}})^{\frac{\delta}{2}} < (E|e_k|^{4+2\delta})^{1-\frac{\delta}{2}} (E e_k^2)^{\frac{\delta}{2}} < c\, n^{1-\frac{\delta}{2}}, \tag{22}$$

有 $\widetilde{B}_n^2 \geqslant \sum_{l=1}^{n}(1-2\lambda_l)E\xi_l^2 = \sum_{l=1}^{n}(1-2\lambda_l)\mathrm{Var} e_l^2 + \sum_{l=1}^{n}(1-2\lambda_l)(E\xi_l^2 - \mathrm{Var} e_l^2)$

$$> c_2 n - 2\sum_{l=1}^{n}\lambda_l E e_l^4 - 2\sigma^4 r - \sum_{l=1}^{n} E e_l^4 I(|e_l| > n^{\frac{1}{4}}) > D_3 n$$

（8）式证毕．

又
$$0 < B_n^2 - \widetilde{B}_n^2 = E\Big(\sum_{l=1}^{r}\sum_{k\neq h}{}' a_{nlk}a_{nlh}e_k e_h\Big)^2 < 2r^2\sigma^4 \tag{23}$$

$$0 < B_{n0}^2 - B_n^2 < \sum_{k=1}^{n}(1-\lambda_k)^2(\mathrm{Var} e_k^2 - E\xi_k^2) + 8E\Big(\sum_{l=1}^{r}\sum_j{}' a_{nlj}e_j \sum_k{}'' a_{nlk}e_k\Big)^2 + 2E\Big(\sum_{l=1}^{r}\sum_{k\neq h}{}'' a_{nlk}\cdot$$

$$a_{nlh}e_k e_h\Big)^2 < \sum_{k=1}^{n} E e_k^4 I(|e_k| > n^{\frac{1}{4}}) + 8r\sum_{l=1}^{r}\sigma^4 + 4r\sigma^4 < c n^{1-\frac{\delta}{2}} \tag{24}$$

$$|B_{n0}^2 - B_{n1}^2| < \sum_{k=1}^{n}(2\lambda_k - \lambda_k^2)\mathrm{Var} e_k^2 + E\Big(\sum_{l=1}^{r}\sum_{k\neq h} a_{nlk}a_{nlh}e_k e_h\Big)^2$$

$$< c n^{1-\frac{\delta}{2}}\sum_{k=1}^{n}(2\lambda_k - \lambda_k^2) + 2r^2\sigma^4 < c n^{1-\frac{\delta}{2}} \tag{25}$$

由（8）,(23)、(24)、(25) 式成立，得（9）、(10)、(11) 式成立．

（Ⅱ）由（6）、(8）两式及 $E|\zeta_k|^3 < 8E\hat{e}_k^6 < Cn^{\frac{2-2\delta}{4}} E|e_k|^{4+2\delta}$，推得（12）式成立．

（Ⅲ）不妨用 $W_n = B_n^{-1}\big(\sum_{k\neq h}{}' a_{nlk}a_{nlh}e_k e_h\big)$ 代替 Δ_n' 讨论．

由（22）式，得 $E|e_k|^3 < (E e_k^4)^{\frac{3}{4}} < c(n^{1-\frac{\delta}{2}})^{\frac{3}{4}}$，注意到 $\sum_k{}' a_{nlk}^m < 1$，$m \geqslant 2$，

故 $E w_n^4 < c n^{-2}\ \Big(\sum_{k=h}{}' a_{nlk}^4 a_{nlh}^4 E e_k^4 E e_h^4 + \sum_{k\neq h\neq m}{}' a_{nlk}^4 a_{nlh}^2 a_{nlm}^2 E e_k^4 E e_h^2 E e_m^2 +$

$$\sum_{k\neq h\neq m}{}' a_{nlk}^3 a_{nlh}^3 a_{nlm}^2 E e_k^3 E e_h^2 E e_m^2 + \sum_{j,k,m,h\text{不等}}{}' a_{nlj}^2 a_{nlk}^2 a_{nlh}^2 a_{nlm}^2 E e_j^2 E e_k^2 E e_m^2 E e_h^2\Big)$$

$$< c n^{-2}((n^{1-\frac{\delta}{2}})^2 + n^{1-\frac{\delta}{2}} + (n^{1-\frac{\delta}{2}})^{\frac{3}{4}\times 2} + c) < c n^{-\delta}\ ,$$

$$E w_n^2 < c n^{-1}\sum_{k\neq h}{}' a_{nlk}^2 a_{nlh}^2 E e_k^2 E e_h^2 < c n^{-1}\ ,$$

$$E|w_n|^3 < (E w_n^2)^{\frac{1}{2}}(E w_n^4)^{\frac{1}{2}} < c n^{-(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2})}\ .$$

（Ⅳ）注意当 $j\in\Lambda''$ 时，$E e_j^4 < (E|e_j|^{4+2\delta})^{\frac{4}{4+2\delta}} < c$，$a_{nlj}^2 < \frac{D_2}{n}$，$l = 1, 2, \cdots r$．

由在Ⅲ的证明中相同的方法，可证（Ⅳ）成立．

（Ⅴ）由 $|\zeta_k| < 2\sqrt{n}$，$\big(\sum_j{}' a_{nlj}E e_j\zeta_j\big)^2 < \sum_j{}' a_{nlj}^2 \sum_j{}'(E e_j\zeta_j)^2 < \sum_j{}' E e_j^2 E\zeta_j^2 < cn$，

将 $S_n'^4, w_n^2$ 展开，即得 $E S_n'^4 w_n^2 < c n^{-1}$，$E S_n'^2 \Delta_n'^2 < (E S_n'^4 \Delta_n'^2)^{\frac{1}{2}} (E\Delta_n'^2)^{\frac{1}{2}} < c n^{-1}$;

$E|s_n'^3\Delta_n'^2|<(Es_n'^2\Delta_n'^2\Delta_n^2)^{\frac{1}{2}}(E\Delta_n'^2)^{\frac{1}{2}}<cn^{-1}$，$E|s_n'^3\Delta_n'^2|<(Es_n'^4\Delta_n'^2)^{\frac{1}{2}}(Es_n'^2\Delta_n'^2)^{\frac{1}{2}}<n^{-1}$.

同理可证（19）式.

（Ⅵ）由（18)(19）式易得$E|s_n\Delta_n'^2|<cn^{-1}$，$E|s_n^2\Delta_n'|<cn^{-\frac{1}{2}}$，又$E|s_n^3|<cB_n^{-3}\sum_{k=1}^{n}E\hat{e}_k^6<cn^{-\frac{3}{2}}n^{\frac{2-2\delta}{4}}\sum_{k=1}^{n}E|e_k|^{4+2\delta}<cn^{-\frac{\delta}{2}}$，我们有$|E(s_n-\Delta_n')^3|<c(Es_n^3|+E|s_n^2\Delta_n'^2|+E|s_n\Delta_n'^2|+E|\Delta_n'|^3)<cn^{-\frac{\delta}{2}}$.

引理2证毕.

引理3 如果 $1-\lambda_j\geqslant\frac{1}{2}$，$E\xi_j^2\geqslant D_0$，$E|e_j|^{4+2\delta}<D_1$，则存在与$n$无关的常数$\eta_1>0$，$\mu>0$，当$|t|<\eta_1 n^{\frac{\delta}{2}}$及$n$充分大时有$|Ee^{it\zeta_j/Bn}|<\exp\{-\mu n^{-1}t^2\}$.

证 用对称化方法易得

$$|Ee^{it\zeta_j/Bn}|^2<1-\frac{E\zeta_j^2}{B_n^2}t^2+\frac{4}{3}|t|^3\frac{3E|\zeta_j|^3}{B_n^3}<\exp\left\{-\frac{E\zeta_j^2}{B_n^2}t^2+\frac{4}{3}|t|^3\frac{E|\zeta_j|^3}{B_n^3}\right\}\tag{26}$$

取$\eta_1=\frac{3D_0D_3^{\frac{3}{2}}}{256D_1D_4}$，则$-\frac{D_0}{4D_4}+\frac{4}{3}\eta_1\frac{8D_1}{D_3^{\frac{3}{2}}}<0$．令$2\mu=-\frac{D_0}{4D_4}+\frac{4}{3}\frac{8D_1}{D_3^{\frac{3}{2}}}$，易见$\mu$，$\eta_1$与$n$无关．当$|t|<\eta_1 n^{\frac{\delta}{2}}$时，

$$-\frac{E\zeta_j^2}{B_n^2}t^2+\frac{4}{3}|t|^3\frac{E|\zeta_j|^3}{B_n^3}<\left(-\frac{D_0}{4D_4n}+\frac{4}{3}\eta_1 n^{\frac{\delta}{2}}\frac{8D_1n^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}}{D_3^{\frac{3}{2}}n^{\frac{3}{2}}}\right)t^2=-2\mu\frac{t^2}{n}.\tag{27}$$

由（26)、(27）式，当$|t|<\eta_1 n^{\frac{\delta}{2}}$时，$|Ee^{it\zeta_j/B_n}|^2<\exp\{-2\mu\frac{t^2}{n}\}$,故$|Ee^{it\zeta_j/B_n}|<\exp\{-\mu n^{-1}t^2\}$.

引理3证毕.

引理4 存在与n无关的常数$\mu>0$，使当$|t|<\eta_1 n^{\frac{\delta}{2}}$及$n$充分大，有

$$|Es_n''^m e^{its_n''}|<c\exp\{-\mu n^{-\frac{1}{2}}t^2\}\qquad m=0,1,2,3\tag{28}$$

证 由引理1,引理3,知当$|t|<\eta_1 n^{\frac{\delta}{2}}$，有

$$|Ee^{its_n''}|=\prod_k''|Ee^{its_k/B_n}|<\prod_k''\exp\{-\mu n^{-1}t^2\}=(e^{-\mu n^{-1}t^2})^{[\sqrt{n}]}<e^{-\frac{\mu}{2}n^{-\frac{1}{2}}t^2}.$$

$m=1,2,3$时，以$m=3$为例，其余可类似证明．对$j,k,m\in\Lambda''$，$|Ee^{it(s_n''-\frac{\zeta_j+\zeta_k+\zeta_m}{B_n})}|<$ $<(e^{-\mu n^{-1}t^2})^{[\sqrt{n}]-3}<(e^{-\mu n^{-1}t^2})^{\frac{\sqrt{n}}{2}}=e^{-\frac{\mu}{2}n^{-\frac{1}{2}}t^2}$，$|t|<\eta_1 n^{\frac{\delta}{2}}$．同理可证$|Ee^{it(s_n''-\frac{\zeta_j+\zeta_k}{B_n})}|<e^{-\frac{\mu}{2}n^{-\frac{1}{2}}t^2}$；$|Ee^{it(s_n''-\zeta_j/B_n)}|<e^{-\frac{\mu}{2}n^{-\frac{1}{2}}t^2}$，$|t|<\eta_1 n^{\frac{\delta}{2}}$．对$j\in\Lambda''$，$E\zeta_j^2<2E\hat{e}_j^4<2(E|e_j|^{4+2\delta})^{\frac{4}{4+2\delta}}<c$，$E|\zeta_j|<(E\zeta_j^2)^{\frac{1}{2}}<c$．故当$|t|<\eta_1 n^{\frac{\delta}{2}}$及$n$充分大，有

$$|Es_n''^3\exp\{its_n''\}|<cn^{-\frac{3}{2}}\Big\{\sum_j''|E\zeta_j^3e^{it\zeta_j/B_n}||Ee^{it(s_n''-\zeta_j/B_n)}|+\sum_{j\neq l}''|E\zeta_j^2e^{it\zeta_j/B_n}||Es_le^{it\zeta_l/B_n}|\cdot$$

$$|Ee^{it(s_n''-\frac{\zeta_j+\zeta_l}{B_n})}|+\sum_{j,k,l\text{不等}}''|E\zeta_je^{it\zeta_j/B_n}||Es_ke^{it\zeta_k/B_n}||E\zeta_le^{it\zeta_l/B_n}||Ee^{it(s_n''-\frac{\zeta_k+\zeta_j+\zeta_l}{B_n})}|$$

$$<cn^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\mu}{2}t^2n^{-\frac{1}{2}}}(2\sqrt{n}c\sqrt{n}+c^2(\sqrt{n})^2+c^3(\sqrt{n})^3)\leqslant c\exp\{-\frac{\mu}{2}n^{-\frac{1}{2}}t^2\}.$$

仍以μ记$\frac{\mu}{2}$，则引理4得证.

引理5 存在与n无关的常数$\mu>0$，使当$|t|<\eta_1 n^{\frac{\delta}{2}}$有$|Es_n'^m e^{its_n'}(e^{-it\Delta_n'}-1)|$

$\leqslant cn^{-\frac{1}{2}}(|t|+|t|^{3+m})e^{-\mu t^2}+\frac{ct^2}{n}m=0,1,2,3.$

证　以$m=3$为例，且以$w_n=B_n^{-1}\left(\sum_{j\neq k}{}'a_{nlj}a_{nlk}e_je_k\right)$代替$\Delta_n'$讨论.

$$|Es_n'^3e^{its_n'}(e^{-itw_n}-1)|\leqslant|t||Es_n'^3w_n|+t^2E(|s_n'^3|w_n^2)$$
$$\leqslant cn^{-\frac{3}{2}}|t|\left(\sum_j{}'E\zeta_j^3w_ne^{its_n'}|+3|\sum_{j\neq k}{}'E\zeta_j^2\zeta_kw_ne^{its_n'}|+|\sum_{j\neq k\neq m}{}'E\zeta_j\zeta_k\zeta_mw_ne^{its_n'}|\right)+t^2E|s_n'|^3w_n^2$$
$$\triangleq I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)+I_4(t). \tag{29}$$

由引理1，$\#A_n\geqslant\varepsilon_1 n$. 对$j\in A_n$. 由引理3，有当$|t|\leqslant\eta_1n^{\frac{\delta}{2}}$时，$|Ee^{it\zeta_j/B_n}|\leqslant e^{-\mu n^{-1}t^2}$，又当$n$充分大时$\#(A_n\cap\Lambda')\geqslant\varepsilon_1n-[\sqrt{n}]\geqslant\frac{2}{3}\varepsilon_1n$，从而有

$$|Ee^{it(s_n'-\zeta_j/B_n)}|\leqslant(e^{-\mu n^{-1}t^2})^{(\frac{2}{3}\varepsilon_1n-1)}\leqslant(e^{-\mu n^{-1}t^2})^{\frac{\varepsilon_1n}{2}}=e^{-\frac{\mu\varepsilon_1}{2}t^2}\qquad |t|\leqslant\eta_1n^{\frac{\delta}{2}}.$$

同理可证，$\quad|Ee^{it(s_n'-\frac{\zeta_j+\zeta_k}{B_n})}|\leqslant e^{-\frac{\mu\varepsilon_1}{2}t^2}$，$|Ee^{it(s_n'-\frac{\zeta_j+\zeta_m+\zeta_k}{B_n})}|\leqslant e^{-\frac{\mu\varepsilon_1}{2}t^2}$.

故当$|t|\leqslant\eta_1n^{\frac{\delta}{2}}$及$n$充分大，利用（28）式及$|e^{it\zeta_k/B_n}-1|\leqslant\frac{|t||\zeta_k|}{B_n}$，

$$I_1(t)\leqslant c|t|n^{-2}\left(\sum_{k\neq j}{}'|a_{nlj}a_{nlk}||Ee_k(e^{it\zeta_k/B_n}-1)|E|e_j\zeta_j^3||Ee^{it(s_n'-\frac{\zeta_j+\zeta_k}{B_n})}|+\right.$$
$$\left.\sum_{j\neq k\neq m}{}'|a_{nlk}a_{nlm}|E|\zeta_j|^3|Ee_k(e^{it\zeta_k/B_n}-1)||Ee_m(e^{it\zeta_m/B_n}-1)||Ee^{it(s_n'-\frac{\zeta_j+\zeta_m+\zeta_k}{B_n})}|\right)$$
$$\leqslant c|t|n^{-2}e^{-\frac{\mu\varepsilon_1}{2}t^2}\frac{4n|t|}{B_n}\left(\sum_k{}'|a_{nlk}|E|e_k\zeta_k|\right)^2+\frac{2t^2\sqrt{n}}{B_n^2}\left(\sum_jE\zeta_j^2\right)\left(\sum_k{}'|a_{nlk}|E|e_k\zeta_k|\right)^2$$
$$\leqslant cn^{-\frac{1}{2}}(t^2+|t|^3)e^{-\frac{\mu\varepsilon_1}{2}t^2}. \tag{30}$$

同理可证，$\quad I_m(t)\leqslant cn^{-\frac{1}{2}}(|t|+|t|^{2m})e^{-\frac{\mu\varepsilon}{2}t^2}\qquad m=2,3\quad |t|\leqslant\eta_1n^{\frac{\delta}{2}}.\quad$（31）

由（18）式，$\quad I_4(t)\leqslant\frac{ct^2}{n}\quad$（32）

由（29）—（32）式，仍以μ记$\frac{\mu}{2}$，则引理5得证.

引理6　$E[(s_n-\Delta_n')^3\exp\{it(s_n-\Delta_n')\}]\sim E[(s_n-\Delta_n')^3\exp\{its_n\}]$

证　只须证明

$E[(s_n^m)(\Delta_n')^{3-m}\exp\{it(s_n-\Delta_n')\}]\sim E[s_n^m(\Delta_n')^{3-m}\exp\{its_n\}],\qquad m=0,1,2,3.$

利用$|e^{ia}-1|\leqslant|a|$，及（14）（18）（19）式可得$m=0,1,2,$时成立.

当$m=3$时，由引理4及引理5.

$$|Es_n^3e^{its_n}(e^{-it\Delta_n'}-1)|\leqslant|E[s_n'^3e^{its_n'}(e^{-it\Delta_n'}-1)||Ee^{its_n''}|+3|Es_n'^2e^{its_n'}(e^{-it\Delta_n'}-1)||Es_n''e^{its_n''}|$$
$$+3|Es_n'e^{its_n'}(e^{-it\Delta_n'}-1)||Es_n''^2e^{its_n''}|+|E(e^{-it\Delta_n'}-1)e^{its_n'}||Es_n''^3e^{its_n''}|$$
$$\leqslant(cn^{-\frac{1}{2}}(|t|+t^6)e^{-\mu t^2}+\frac{ct^2}{n})e^{-\mu n^{-\frac{1}{2}}t^2}+[cn^{-\frac{1}{2}}(|t|+|t|^5)e^{-\mu t^2}+\frac{ct^2}{n}]e^{-\mu n^{-\frac{1}{2}}t^2}$$
$$+[cn^{-\frac{1}{2}}(|t|+t^4)e^{-\mu t^2}+\frac{ct^2}{n}]e^{-\mu n^{-\frac{1}{2}}t^2}+[cn^{-\frac{1}{2}}(|t|+|t|^3)e^{-\mu t^2}+\frac{ct^2}{n}]e^{-\mu n^{-\frac{1}{2}}t^2}.$$

由关系～的定义，知$m=3$时也成立.

引理 7 令$\psi_n(t)=\{i^3E(s_n-\Delta_n')^3+3t-t^3\}e^{-\frac{t^2}{2}}$，则$i^3E(s_n-\Delta_n')^3e^{its_n}\sim\psi_n(t)$.

证 令$\varphi_n(t)=\{i^3E(s_n-\Delta_n')^3+3t-t^3\}Ee^{its_n}$，欲证$\psi_n(t)\sim\varphi_n(t)$:

$$|\psi_n(t)-\varphi_n(t)|=|i^3E(s_n-\Delta_n')^3+3t-t^3||Ee^{its_n}-e^{-\frac{t^2}{2}}|\quad.$$

令$\widetilde{S}_n=\widetilde{B}_n^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\zeta_k\right)$，则由〔4〕第四章引理1，$\exists\eta_2>0$，当$|t|<\eta_2L_n^{-1}$时，$|Ee^{its_n}-e^{-\frac{t^2}{2}}|\leqslant C\widetilde{L}_n^0|t|^3e^{-\frac{1}{3}t^2}$. 由（9）式，当$n$充分大后有$\frac{1}{2}<\frac{\widetilde{B}_n^2}{B_n^2}<1$，故当$|t|<\eta_2\widetilde{L}_n^{-1}$

$$|Ee^{itS_n}-e^{-\frac{t^2}{2}}|=|Ee^{i(\frac{\widetilde{B}_n}{B_n}t)\widetilde{S}_n}-e^{-\frac{t^2}{2}}|\leqslant|Ee^{i(\frac{\widetilde{B}_n}{B_n}t)\widetilde{S}_n}-e^{-\frac{1}{2}(\frac{\widetilde{B}_n}{B_n}t)^2}|+|e^{-\frac{1}{2}(\frac{\widetilde{B}_n}{B_n}t)^2}-e^{-\frac{t^2}{2}}|$$

$$\leqslant c\widetilde{L}_n|\frac{\widetilde{B}_n}{B_n}t|^3e^{-\frac{1}{3}|\frac{\widetilde{B}_n}{B_n}t|^2}+\frac{1}{2}|(\frac{\widetilde{B}_n}{B_n})^2-1|t^2e^{-\frac{1}{2}(\frac{\widetilde{B}_n}{B_n}t)^2}$$

$$\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}|t|^3e^{-\frac{t^2}{6}}+cn^{-1}t^2e^{-\frac{t^2}{6}}\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(t^2+|t|^3)e^{-\frac{t^2}{6}}\quad.\tag{33}$$

又由（20）式得 $$|i^3E(S_n-\Delta_n')^3+3t-t^3|\leqslant c(1+|t|^3)\,.\tag{34}$$

由（12）式，存在$c_0>0$，使$\widetilde{L}_n\leqslant c_0^{-1}n^{-\frac{\delta}{2}}$，$c_0$与$n$无关，故$c_0n^{\frac{\delta}{2}}\leqslant\widetilde{L}_n^{-1}$. 当$|t|<\eta_2c_0n^{\frac{\delta}{2}}$，由（33)(34）式，有

$$|\varphi_n(t)-\psi_n(t)|\leqslant c(1+|t|^3)n^{-\frac{\delta}{2}}(t^2+|t|^3)e^{-\frac{t^2}{6}},\ \text{故}\varphi_n(t)\sim\psi_n(t).$$

由上所述，欲证引理7成立，只须证明:

$$i^3E(S_n-\Delta_n')^3e^{itS_n}\sim\{i^3E(S_n-\Delta_n')^3+3t-t^3\}Ee^{itS_n}\tag{35}$$

而欲证（35)，只须证明:

$$i^3ES_n^3e^{its_n}\sim(i^3ES_n^3+3t-t^3)Ee^{its_n}\tag{36}$$

$$E(S_n)^m(\Delta_n')^{3-m}e^{its_n}\sim ES_n^m(\Delta_n')^{3-m}Ee^{itS_n},\quad m=0,1,2.\tag{37}$$

先证（36）式:

$$i^3ES_n^3e^{itS_n}=i^3\left(B_n^{-3}\sum_{j=1}^{n}E\zeta_j^3e^{itS_n}+3B_n^{-3}\sum_{j\neq k}E\zeta_j^2\zeta_ke^{itS_n}+B_n^{-3}\sum_{j\neq k\neq m}E\zeta_j\zeta_k\zeta_me^{itS_n}\right),$$

$$(i^3ES_n^3+3t-t^3)Ee^{itS_n}=\left(i^3B_n^{-3}\sum_{k=1}^{n}E\zeta_k^3+3t-t^3\right)Ee^{itS_n}\quad.$$

由$e^{ita}=1+ita\theta\ (|\theta|<1)$，我们有

$$|Ee^{it\zeta_k/B_n}-e^{it\zeta_k/B_n}|=|1+\frac{t}{B_n}E\zeta_ki\theta-1-\frac{t}{B_n}i\theta\zeta_k|\leqslant\frac{|t|}{B_n}(E|\zeta_k|+|\zeta_k|),$$

故 $$|B_n^{-3}\sum_{j=1}^{n}E\zeta_j^3e^{itS_n}-B_n^{-3}\sum_{k=1}^{n}E\zeta_k^3Ee^{itS_n}|=B_n^{-3}\left|\sum_{k=1}^{n}E\zeta_k^3(e^{it\zeta_k/B_n}-Ee^{it\zeta_k/B_n})Ee^{it(S_n-\zeta_k/B_n)}\right|$$

$$\leqslant B_n^{-4}|t|\left(\sum_{k=1}^{n}E[|\zeta_k|^3(E|\zeta_k|+|\zeta_k|)]|Ee^{it(S_n-\zeta_k/B_n)}|\right)\leqslant cn^{-2}|t|e^{-\mu t^2}\sum_{k=1}^{n}E\hat{e}_k^8\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}e^{-\mu t^2}|t|.$$

由关系～的定义，知$B_n^{-3}\sum_{j=1}^{n}E\zeta_j^3e^{itS_n}\sim B_n^{-3}\sum_{k=1}^{n}E\zeta_k^3Ee^{itS_n}$. 同理可证，$3i^3B_n^{-3}\sum_{j\neq k}E\zeta_j^2\zeta_ke^{itS_n}\sim 3tEe^{itS_n}$，$i^3B_n^{-3}\sum_{j\neq k\neq m}E\zeta_j\zeta_k\zeta_me^{itS_n}\sim-t^3Ee^{itS_n}$.

为证（37）式，现以$m=2$为例，其余可类似证明. 不失普遍性，仍以$w_n=$

$B_n^{-1}\sum\limits_{j\neq k}a_{nlj}a_{nlk}e_je_k$代替$\Delta'_n$讨论. 记$S_{nj}=S_n-\zeta_j/B_n$, $S_{njk}=S_n-(\zeta_j+\zeta_k)/B_n$, 则

$$|ES_n^2w_ne^{itS_n}-ES_n^2w_nEe^{itS_n}|<B_n^{-3}\left|\sum_{j\neq k}{}'a_{nlj}a_{nlk}Ee_j\zeta_je_k\zeta_k(e^{itS_n}-Ee^{itS_n})\right|+$$

$$+B_n^{-3}\left|\sum_{\substack{1<m<n\\ m\neq k,j}}\sum_{k\neq j}{}'a_{nlk}a_{nlj}Ee_k\zeta_ke_j\zeta_me^{itS_n}\right|+B_n^{-3}\left|\sum_{\substack{k\neq m\\ 1<k,m<n\\ k\neq j,h\\ m\neq j,h}}\sum_{j\neq h}{}'a_{nlj}a_{nlh}Ee_je_h\zeta_k\zeta_me^{itS_n}\right|$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

$$I_1<B_n^{-3}\left|\sum_{j\neq k}{}'a_{nlj}a_{nlk}Ee_j\zeta_je^{it\zeta_j/B_n}Ee_k\zeta_k(e^{it\zeta_k/B_n}-Ee^{it\zeta_k/B_n})Ee^{itS_{njk}}\right|$$

$$+B_n^{-3}\left|\sum_{j\neq k}{}'a_{nlj}a_{nlk}Ee_k\zeta_kEe_j\zeta_j(e^{it\zeta_j/B_n}-Ee^{it\zeta_j/B_n})Ee^{itS_{nj}}\right|$$

$$<cn^{-2}|t|\left(\sum_{j\neq k}{}'|a_{nlj}a_{nlk}|E|e_j\zeta_j|E|e_k\zeta_k^2|\right)e^{-\mu t^2}<cn^{-\frac{1}{2}}|t|e^{-\mu t^2}; \tag{38}$$

同理可证

$$I_2(t)<cn^{-\frac{1}{2}}|t|e^{-\mu t^2}, \tag{39}$$

$$I_m(t)<cn^{-\frac{1}{2}}|t^2|e^{-\mu t^2}, \quad m=3,4,5. \tag{40}$$

由（38）～（40）式，知$ES_n^2w_ne^{itS_n}\sim ES_n^2w_nEe^{itS_n}$. 引理 7 证毕.

三、定 理 的 证 明

（一） $(n-r)(\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2)=\sum\limits_{k=1}^n e_k^2-\sum\limits_{l=1}^r\left(\sum\limits_{k=1}^n a_{nk}e_k\right)^2-(n-r)\sigma^2\leqslant\sum\limits_{k=1}^n(e_k^2-\sigma^2)+r\sigma^2$,

故

$$\frac{(n-r)(\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2)}{B_{n0}}<\frac{B_{n1}}{B_{n0}}\frac{\sum\limits_{k=1}^n(e_k^2-\sigma^2)}{B_{n1}}+\frac{r\sigma^2}{B_{n0}}$$

设$\sum\limits_{k=1}^n(e_k^2-\sigma^2)/B_{n1}$的分布函数为$Q_n^{(1)}(x)$，则由〔3〕，有

$$|Q_n^{(1)}(x)-\Phi(x)|<\frac{c}{B_{n1}^{2+\delta}(1+|x|)^{2+\delta}}\sum_{k=1}^n E|e_k^2-\sigma^2|^{2+\delta}<cn^{-\frac{\delta}{2}}(1+|x|)^{-(2+\delta)}$$

又由（11）式及$\frac{r\sigma^2}{B_{n0}}<cn^{-1/2}<cn^{-\delta/2}$，以$Q_n^{(2)}(x)$记$\left(\sum\limits_{k=1}^n(e_k^2-\sigma^2)+r\sigma^2\right)\Big/B_{n0}$的分布函数，则由〔2〕的引理1，有

$$|Q_n^{(2)}(x)-\Phi(x)|<cn^{-\frac{\delta}{2}}(1+|x|)^{-(2+\delta)} \tag{41}$$

（二） $(n-r)(\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2)=\sum\limits_{k=1}^n\left(1-\sum\limits_{u=1}^r a_{nuk}^2\right)(e_k^2-\sigma^2)-\sum\limits_{k=1}^r\sum\limits_{j\neq k}a_{nlj}a_{nlk}e_je_k$

$$>(B_nS_n-B_n\Delta'_n)-B_{n0}\Delta''_n-\sum_{k=1}^n(1-\lambda_k)Ee_k^2I(|e_k|>n^{1/4}).$$

令$\Gamma_n(x)=P(S_n-\Delta'_n<x)$，$f_n(t)=Ee^{it(S_n-\Delta'_n)}$，令$h_n(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}(1+i^3t^3E(S_n-\Delta'_n)^3/6)$，$H_n(x)$为$h_n(t)$的Fourier-Stieltjes变换，则$H_n(x)=\Phi(x)-(1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}(x^2-1)E(S_n-\Delta'_n)^3/6$.

若证明了，$|H_n(x)-V_n(x)|\leqslant cn^{-}\ (1+|x|)^{-(2+\delta)}$，则由（20）式，$|H_n(x)-\Phi(x)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}|x^2-1|\left|\frac{E(S_n-\Delta_n')^3}{6}\right|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(|x|)^{-(2+\delta)}$，故 $|V_n(x)-\Phi(x)|\leqslant|V_n(x)-H_n(x)|+|H_n(x)-\Phi(x)|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(1+|x|)^{-(2+\delta)}$. 由于$H_n(x)$，$V_n(x)$ 满足〔4〕第六章引理8的条件，故 $|V_n(x)-H_n(x)|\leqslant c(1+|x|)^{-3}\left\{\int_{|t|<\eta n^{\delta/2}}|t|^{-1}|f_n(t)-h_n(t)|\mathrm{d}t+\right.$

$$\left.\int_{|t|<\eta n^{\delta/2}}|t|^{-1}|\delta_3(t)|\mathrm{d}t+\frac{c}{n^{\delta/2}}\right\}\qquad,$$

$$\delta_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\mathrm{d}(x^3(V_n(x)-H_n(x)))\quad.$$

而由〔4〕第六章引理7，

$$|V_n(x)-H_n(x)|\leqslant c(1+|x|)^{-3}\left\{\int_{|t|<\eta n^{\delta/2}}|t|^{-1}|f_n(t)-h_n(t)|\mathrm{d}t+\right.$$

$$\left.\sum_{j=0}^{3}\int_{|t|<\eta n^{\delta/2}}|t|^{j-4}|f_n^{(j)}(t)-h_n^{(j)}(t)|\mathrm{d}t+cn^{-\frac{\delta}{2}}\right\}.$$

经计算可知，$f_n^{(3)}(t)=i^3E(S_n-\Delta_n')^3e^{it(S_n-\Delta_n')}$，$h_n^{(3)}(t)=(i^3E(S_n-\Delta_n')^3+3t-t^3)e^{-\frac{t^2}{2}}+E(S_n-\Delta_n')^3(2t^4-\frac{9}{2}t^2-\frac{t^6}{6})i^3e^{-\frac{t^2}{2}}$. 取$\eta=\min(\eta_1,\ \eta_2c_0)$，则由引理6，引理7，有

$$f_n^{(3)}(t)\sim\psi_n(t)=(i^3E(S_n-\Delta_n')^3+3t-t^3)e^{-\frac{t^2}{2}},\tag{42}$$

由（20）式，有$f_n^{(3)}(t)\sim h_n^{(3)}(t)$. 又经计算可知 $|f_n^{(2)}(0)-h_n^{(2)}(0)|=f_n^{(1)}(0)-h_n^{(1)}(0)|=|f_n(0)-h_n(0)|=0$，故由〔2〕的引理2，$\sum_{j=0}^{3}\int_{|t|<\eta n^{\delta/2}}|t|^{j-4}|f_n^{(j)}(t)-h_n^{(j)}(t)|\mathrm{d}t\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}$.

由（33）式，当$|t|\leqslant\eta_2\widetilde{L}_n^{-1}$时，有

$$\begin{aligned}|Ee^{it(S_n-\Delta_n')}-e^{-\frac{t^2}{2}}|&\leqslant|Ee^{itS_n}-e^{-\frac{t^2}{2}}|+|Ee^{itS_n}(e^{-it\Delta_n'}-1)|\\&\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(t^2+|t|^3)e^{-\frac{t^2}{6}}+|Ee^{itS_n''}||Ee^{itS_n'}(e^{-it\Delta_n'}-1)|\\&\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(t^2+|t|^3)e^{-\frac{t^2}{6}}+e^{-\mu n^{-1/2}t^2}(|Ee^{itS_n'}\Delta_n'||t|+E\Delta_n'^2t^2)\\&\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(t^2+|t|^3)e^{-\frac{t^2}{6}}+ce^{-\mu n^{-1/2}t^2}(n^{-\frac{1}{2}}|t|^3e^{-\mu t^2}+\frac{t^2}{n}).\end{aligned}\tag{43}$$

当$|t|\leqslant\eta n^{\frac{\delta}{2}}$时，（42)(43）同时成立，故$|V_n(x)-H_n(x)|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(1+|x|)^{-(2+\delta)}$，所以

$$|V_n(x)-\Phi(x)|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(1+|x|)^{-(2+\delta)}.\tag{44}$$

注意到$\frac{B_nS_n-B_n\Delta_n'}{B_{n0}}=\frac{B_n}{B_{n0}}(S_n-\Delta_n')$，令$\frac{B_n}{B_{n0}}(S_n-\Delta_n')$ 的分布函数为$Q_n^{(3)}(x)$，则由（10）式及（44）式，我们有

$$|Q_n^{(3)}(x)-\Phi(x)|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(1+|x|)^{-(2+\delta)}.$$

又当$|x|\leqslant1$时，$P\left(\Delta_n''\geqslant\frac{c|x|}{n^{\delta/2}}\right)\leqslant\frac{cn^{\frac{\delta}{2}\times4}}{|x|^4}E\Delta_n''^4\leqslant\frac{cn^{2\delta}n^{-\frac{5}{2}\delta}}{(1+|x|)^{2+\delta}}\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(1+|x|)^{-(2+\delta)}$，

$$B_{n0}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(1-\lambda_j)Ee_j^2I(|e_j|>n^{\frac{1}{4}})\right)\leqslant\frac{1}{n^{\frac{1+2\delta}{4}}n^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=1}^{n}E|e_k|^{4+2\delta}\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}},$$

令$B_{n0}^{-1}[(B_nS_n-B_n\Delta_n')-B_{n0}\Delta_n''-\sum_{k=1}^{n}(1-\lambda_k)Ee_k^2I(|e_k|>n^{\frac{1}{4}})$ 的分布函数为$Q_n^{(4)}(x)$，则由〔2〕的引理1，有

$$|Q_n^{(4)}(x)-\Phi(x)|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(1+|x|)^{-(2+\delta)}. \tag{45}$$

由（41）和（45）式，知$|G_n(x)-\Phi(x)|\leqslant cn^{-\frac{\delta}{2}}(1+|x|)^{-(2+\delta)}$定理证毕.

作者得到白志东老师的热情指导，顺致感谢.

参 考 文 献

〔1〕陈希孺，中国科学，1981年第2期，129--140.

〔2〕赵林城、陈希孺，中国科学，1982年第10期，1042—1055.

〔3〕A. Bikelis, Estimates of the Remainder Term in the Central Limit Theorem, Litovskiǐ Matem., sb. 6, No.3, 323—346(1966).

〔4〕Petrov, V. V., Sums of Independent Random Variables, Spring—Verlag, 1975.

Noncompatible estimation of the residual sum of sguares of central limit theorem in linear model

Hou Po

abstract

In linear models, the error variance σ^2 of random errors is usually estimatted by the residual sum of squares (divided by a suitable degree of freedom), based on the first n observations (denote it by $\hat{\sigma}_n^2$). It is well-known t that under certain conditions, the distribution of this estimate, when standardised, converges to the standard normal distribution. In this paper, it is shown that

$|G_n(x)-\Phi(x)|=O(n^{-\frac{\delta}{2}}(1+|x|)^{-(2+\delta)})$, when the errors are indepedent (may not be identically distributed) and their $4+2\delta$ order moments exist, where $G_n(x)$ is the distribution of $(\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2)/\sqrt{var\sigma_n^2}$, $\Phi(x)=1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.