

Orlicz空间研究的进展(II)——Orlicz空间的应用

吴从新

王廷辅

(哈尔滨工业大学)

(哈尔滨科技大学)

Orlicz空间是泛函分析中比较富于应用的一个分支学科,它对诸如积分方程、偏微分方程、实函数论、复函数论和概率论等方面都有广泛应用,尤其对于非线性问题更有成效.它的应用范围还可以涉及到控制理论、统计物理等更为实际的领域.当然对泛函分析本身,它也有不少直接应用.

限于篇幅和作者的水平与学识,文中提到的Orlicz空间的应用仅仅是我们所稍许了解的一些侧面,就是在这些方面,我们也并没有把有关文献尽量罗列,而仅指出一些比较基本的.

本文沿用作者前文〔1〕和书〔2〕、〔3〕中的一切名词和记号,同样,凡是在〔3〕中已经介绍过的应用,原则上在这里就不再重复了.

一、积分方程方面

对于Orlicz空间中的线性积分算子 $Au(x) = \int_G K(x, y)u(y)dy$ 的连续性和全连续性的研究,六十年代初有 Руткикий^[4]、陈广荣^[5]和张石生^[6]等人的工作,包含了〔2〕中的有关定理,最近任重道^[7]首次作出了在某种意义上 A 为连续的充要条件,Ando^[8]则利用射影算子来研究这类问题.又1970之Blosicini^[9]考虑了一类特殊的线性积分算子 $Au(x) = \int_0^1 K(x-y)u(y)dy$.

Orlicz空间应用于研究非线性积分方程富有成效.众所周知有广泛应用的Hammerstein方程和Uryson方程可归结为对 Немыцкий算子 $hu(x) = g(x, u(x))$ 和Uryson算子 $Ku(x) = \int_G K(x, y, u(y))dy$ 的连续性与全连续性的讨论($g(x, u)$, $K(x, y, u)$ 满足Carathéodory条件).〔3〕中曾提到Шагин^[10]郭大钧^[11]、〔12〕、张上泰^[13]以及最近王声望^[14]得到了一批有意义的结果,关于这方面有联系的工作,如还有〔15〕、〔16〕、〔17〕、〔18〕、〔19〕等.1965年Вайнберг等的〔20〕、〔21〕则用变分方法和拓扑方法来研究Hammerstein方程,而张石生^[22]、〔23〕又研究了一类特殊的Hammerstein方程即 $g(x, u) = g(u)$ 的情形.

1970—71年Ioffe^[24—26]进一步考虑了由带参数的多元 N 函数生成的矢值Orlicz空间中的 Немыцкий算子并用于变分问题.1976年Chatelain^[27]和Vaudene^[28]在他们的矢值Orlicz空间框架下也都研究了相应的算子 h .

二、偏微分方程方面

* 1982年6月24日收到,1984年5月6日收到修改稿.

Orlicz空间也是研究非线性偏微分方程的一种有力工具,这方面文献极为丰富,现在〔3〕的基础上再作进一步的补充.

关于Orlicz空间 $L_M^*(\Omega)$ 嵌入理论的研究,最早的是Гельман1960年的〔29〕,后来的工作陆续的如有〔30〕、〔31〕、〔32〕、〔33〕、〔34〕等,〔32〕首次表明Orlicz空间在其中起实质作用.此外也有应用Orlicz空间于Dirichlet问题的〔35〕.

至于Orlicz-Sobolev空间 $W^m L_M(\Omega)$ 的嵌入定理最早见于R. O'Neil1966年的〔36〕,但他对 $M(u)$ 的限制较强,七十年代初Donaldson与Trudinger〔37〕的工作得到更好结果,1976年Koronei〔38〕又改进了他们的某些命题.关于这方面还有张庆雍的〔39〕和G. Hardy的〔40〕等.

1974年Trudinger〔41〕利用所引入的多元 N 函数生成的矢值Orlicz空间,随后H. Hudzik〔42〕、〔43〕进而利用带参数的多元 N 函数生成的矢值Orlicz空间,与此同时Barril和Vaudene〔44〕、〔45〕也利用他们框架下的矢值Orlicz空间分别推广了Orlicz-Sobolev空间. Can Dyk Van 1980年的〔46〕引进了无穷级的Orlicz-Sobolev空间,而刘兴隆的〔47〕则考虑仅含非混合导数的Orlicz-Sobolev空间.联系于抛物型方程的初值问题Donaldson〔48〕引入了所谓的非齐次Orlicz-Sobolev空间. Fougères〔49〕、〔50〕和M. —T. Lacroix〔51〕又引进了所谓中间Orlicz-Sobolev空间,它是非整数阶Sobolev空间的一种推广,用于椭圆型方程边界问题.

1957年起丁夏畦〔52—55〕提出了空间 D_M^r 并通过Fourier变换的Young-Hausdorff定理推广了Sobolev嵌入定理,吴从炘在随后的〔56—59〕代替 D_M^r 中的 r' 为一般的无界正可测函数 $h(r)$,得到更广泛的空间 D_M^h .最近丁夏畦还把 D_M^h 用于代数数域上的大筛法,如参看他的专著〔60〕.

自1978年丁夏畦及罗佩珠等人的〔61—63〕开始,他们引入并研究了由整函数型的 N 函数 $M(u)$ 生成的新的函数空间 $L_p(M)$ 和 $W^m L_p(M)$,得到嵌入定理的推广以及对奇异积分算子、微分方程和差分方程的先验估计和误差估计、强非线性变分问题等方面的应用.1981年丁夏畦和罗佩珠的〔64〕又进一步引进由一系列赋范函数空间和一个整函数型 N 函数生成的所谓 B_a 空间,它包括 $L_p(M)$ 和 $W^m L_p(M)$ 作为特例.关于丁夏畦等的这些工作在〔60〕中有更完备的文献.

三、实函数论方面

五十年代末Musielak和Orlicz〔65〕、〔66〕就研究了由 N 函数 $M(u)$ 生成的广义圈变函数空间 V_M 和广义绝对连续函数空间 AC_M^* ,以后Lesiewicz和吴从炘的〔67〕、〔68〕继续了这方面的研究.1968年Herda〔69〕又把 V_M^* 推广到由 ϕ 函数生成的情形.与此相联系, Musielak〔70〕还考虑了广义圈变数列.

关于Orlicz空间对Fourier级数的应用,如1961年Taberski〔71〕给出了 2π 周期函数 $f(x)$ 的Fourier级数绝对收敛的充分条件,1972年Waterman〔72〕讨论了 $f(x)$ 的Fourier级数的一致收敛性,而1976年Осколков〔73〕则得到了 $f(x)$ 的导数具有一致收敛的Fourier级数的一个充分条件.

为了研究奇异积分,Салехов与吴从炘〔74〕、〔75〕、〔76〕先后引入了Legesgue-Orlicz点、平

均Lebesgue—Orlicz点, 和Lebesgue—Banach点, 近年吴从炘等^{[77]、[78]}又进一步弄清了这几种点之间的关系, 而Салехов的 [79]、[80]则已把这些点用于奇异积分. Taberski^[81]和威征^[82]也都研究过Orlicz空间中奇异积分的收敛性.

作为 L_p 空间逼近论的推广, Kokilashvili^[83]于1966年对Orlicz空间引进了 $f(x)$ 的 $k(k \geq 1)$ 次光滑模 $\omega_k(f, \delta)_M = \sup_{h \leq \delta} \|A_h^k f\|_M$, 并且利用它给出了不超过 n 阶的三角多项式的最佳逼近度 $E_n(f)_M$ 的估计式, 1980年Ромашанов^[84]又利用光滑模表示出不超过 n 阶的代数多项式和有理函数的最佳逼近度. Grigorjau^[85]也讨论了Orlicz空间中的有理逼近, 而Тотков^[86]则首先研究了Orlicz空间中的Splain逼近. 与此相关Stypinski^[87]对 k 阶Steklov平均值 $f_h^k(x)$ 得到了 $\|f_h^k - f\|_M = o(h^k)$ 的充要条件. [84]又对 $\omega_k(f, \delta)_M = o(\delta)$ 作出了刻划, 李文林^[88]也对此有过讨论. 1980年以来, Lander和Rogge^{[89]、[90]}还研究了 L_ϕ 空间中的最佳逼近, 指对给定的 $C \subset L_\phi$ 和 $f \in L_\phi$ 有 $g \in L_\phi$ 使 $\int \phi(|f-g|)d\mu = \inf_{h \in C} \int \phi(|f-h|)d\mu$.

Albrecht^[91]较系统地研究了Orlicz—Marcinkiewicz空间 $A_M^* = \{x(t): \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |x(t)y(t)| dt < \infty, S_N(y) = \overline{\lim}_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T N(y(t)) dt < \infty\}$, 得到Besicovitch意义下的概周期函数的一种推广. 最近Лозановский^[92]有新的工作, 王声望对此也有过讨论, 见 [93].

Waszak 1968年的 [94]将Orlicz空间用于无穷矩阵 A 的叙列求和, 即所谓 (A, ϕ) 求和, 1976年他又有了新的工作 [95]; 他还相应地考虑了函数求和, 见 [96]以及后来的 [97—99], 他的工作包含了前人的许多结果.

四、复函数论方面

1956年Weiss^[100]就考虑了Hardy空间 H_p 的推广, 即定义Orlicz—Hardy空间 $H_M^* = \{f(z) \in C^1(0), \sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} M(\log |f(re^{i\theta})|) d\theta < \infty\}$, 而Тернаторев 1962年的 [101]则规定 $H_M^* = \{f(z): \exists c > 0, \sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} M(\log |f(re^{i\theta})|) d\theta < c\}$. 后来Lesniewicz的 [102—107]把这两种方式结合起来, 他对更一般的所谓对数凸的 ϕ 函数(相当于存在 N 函数 $M(u)$ 使 $\phi(u) = M(\log u)$), 按Тернаторев方式来生成 H_M^* , 并进行了较系统的研究. 李文清、陈文忠1964—65年间的 [108]、[109]也研究过 H_M^* .

五、概率论方面

早在1956年A. T. Bharuha—Reid^[110]就首次考察了Orlicz空间中的随机元, 其后不久, 他与Hans又都研究了可分Orlicz空间中的随机Fredholm积分方程与随机Uryson积分方程, 如可参看书 [111]的p. 156和p. 206.

1967年Urbanik和Woyczynski^[112]证明了在一定条件下随机可积函数空间与某Orlicz空间的元一致. Patricz^[113] 1972年把所有Young函数按通常快慢为序组成的锥用于概率论, 另一方面Dacunha—Castelle与Schreiber^[114]于1973年又用概率论方法得到“对称”空间同

构于Orlicz空间的子空间的判别准则。

研究定义在概率空间上的Orlicz空间的条件期望算子和预报算子的最早工作是1971年M. M. Rao的〔115〕, 1980年Herrndorf〔116〕指出了Rao的推理有严重错误, 主要是他在处理Orlicz空间的严格凸性时混淆了两种范数之间的差别。与此同时Lander等〔117〕也考虑了同类问题, 而他们的证明方法则极为简单。Darst等〔118〕又进一步讨论了预报算子。

六、其它方面

关于Orlicz空间对广泛函数分析自身的应用, 仅举一例, Musielak 1961—67年间的〔119—122〕将L. Schwartz的分布论一书中的 \mathcal{D}_L 空间推广为 $\mathcal{D}_M = \{x(t); \forall p, D^p x(t) \in L_M^*\}$, 接着Magdziarz〔123〕又进一步探讨了它的子空间 $D_M = \{x(t); \forall \lambda, p, \lambda D^p x(t) \in L_M\}$ 。

至于联系到其它应用学科的例子, 如Ing-Yih S. Chang和John. J. Kozak 1972年在统计力学方面的工作〔124〕。

参 考 文 献

- 〔1〕吴从焯、王廷辅, Orlicz空间研究的进展(1), 数学研究与评论, 卷六, 第三期。
- 〔2〕М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтский, 凸函数和奥尔里奇空间, (1962), 科学出版社(吴从焯译)
- 〔3〕吴从焯、王廷辅, 奥尔里奇空间及其应用, (1983), 黑龙江科技出版社
- 〔4〕Я. Б. Рунтский, ИВУЗ Матем., 30(1962), no. 5, 87—100
- 〔5〕陈广荣, 内蒙师院学报, (1965), no. 1, 1—5
- 〔6〕张石生, 四川大学学报, (1964) no. 3, 94—105
- 〔7〕任重道, 自然杂志, (1983), no. 6, 238—239
- 〔8〕T. Ando, Indag. Math., 24(1962), 235—239
- 〔9〕А. А. Блосцин, Л. В. Салехов, Украин. Матем. Ж., 22(1970), 321—329
- 〔10〕И. В. Шрагин, Матем. Сб., 65(197), (1964), 324—337
- 〔11〕郭大钧, 数学进展, 6(1963), 70—92
- 〔12〕郭大钧, 中国科学, 11(1962), 437—452
- 〔13〕张上泰, 数学学报, 13(1963), 204—215
- 〔14〕王声望, 科学通报(数理化专辑), (1980), 42—45
- 〔15〕М. М. Вайнберг, Studia Math., 17(1958), 85—95
- 〔16〕М. М. Вайнберг, И. В. Шрагин, ДАН СССР, 120(1958), 941—944
- 〔17〕И. В. Шрагин, ibid., 140(1961), 543—545
- 〔18〕张上泰, 数学学报, 14(1964), 137—142
- 〔19〕张石生, 黄发伦, 四川大学学报, (1965), no. 1, 27—47
- 〔20〕М. М. Вайнберг, И. В. Шрагин, ИВУЗ Матем., 11(1965), 17—27
- 〔21〕М. М. Вайнберг, И. В. Шрагин, ibid., 46(1965), 32—37
- 〔22〕张石生, 四川大学学报, (1965), no. 2, 51—60
- 〔23〕张石生, ibid., (1965), no. 2, 61—72
- 〔24〕А. Д. Иoffe, ДАН СССР, 195(1970)
- 〔25〕А. Д. Иoffe, ibid., 201(1971), 784—786
- 〔26〕А. Д. Иoffe, Collection of articles dedicated to L. V. Kantorovič on the occasion of his sixtieth birthday, Optimizacija, 3(20)(1971), 47—86, 87—102
- 〔27〕M. J. Chatlain, C. R. Acad. Sci. Paris Ser A—B, 283(1976), A763—A766
- 〔28〕R. Vaudene, ibid., 283(1976), A767—A770

- [29] И. В. Гельман, ДАН СССР 129(1959), 675—679
- [30] Ю. А. Лубинский, *ibid.*, 152(1963), 529—532
- [31] Л. Б. Рабиневич, ИВУЗ Матем., 9(1968), 78—86
- [32] N. S. Trudinger, *J. Math. Mech.*, 17(1967), 473—483
- [33] В. С. Климов, *Сиб. Матем. Ж.*, 13(1972), 334—348
- [34] В. С. Климов, *Серия Матем.*, 40(1976), 635—671
- [35] Z. Frydrych, *Comment. Math. Prace Mat.*, 20(1977/78), no. 2, 311—313
- [36] R. O'Neil, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser A—B*, 263(1966), A463—A466
- [37] T. Donaldson, N. S. Trudinger, *J. Functional Anal.*, 8(1971), 52—75
- [38] J. D. Koronel, *Israel J. Math.*, 24(1976), 119—1398
- [38] 张庆雍, *数学进展*, 6(1963), 191—196
- [40] G. Hardy, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 3(1981), 121—138
- [41] N. S. Trudinger, *Studia Math.*, 50(1974), 17—30
- [42] H. Hudzik, *Funct. Approximatio Comment. Math.*, 4(1976), 37—51
- [43] H. Hudzik, *Comment. Math. Prace Mat.*, 21(1980), 315—324
- [44] C. Barril, R. Vaudene, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser A—B*, 284(1977), A45—A48
- [45] R. Vaudene, *Travaux Sém. Anal. Convexe*, 8(1978), 1—23
- [46] Can Dyk Van, ДАН СССР 250(1980), 1331—1334
- [47] 刘兴隆, *科学通报*, 26(1981), 337—340
- [48] T. Donaldson, *J. Differential Equations*, 13(1974), 201—256
- [49] A. Fougères, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser A—B*, 274(1972), A181—A184
- [50] A. Fougères, *ibid.*, 274(1972), A179—A182
- [51] M. — T. Lacroix, *J. Math. Pures Appl.*, 53(1974), 439—458
- [52] 丁夏畦, *科学记录新辑*, 1(1957), 287—290
- [53] 丁夏畦, *ibid.*, 2(1958), 57—60
- [54] 丁夏畦, *数学学报*, 10(1960), 316—360
- [55] 丁夏畦, *ibid.*, 12(1962), 107—108
- [56] 吴从妍, *哈尔滨工业大学学报*, (1958), no. 4, 85—90
- [57] 吴从妍, *科学记录新辑*, 3(1959), 207—209
- [58] 吴从妍, *ibid.*, 3(1959), 210—212
- [59] 吴从妍, *数学进展*, 5(1962), 89—92
- [60] 丁夏畦, *可微函数空间与偏微分方程*, (1983), 湖北科技出版社
- [61] 丁夏畦, *中国科学*, 21(1978), 287—297
- [62] 丁夏畦, *武汉大学学报*, (1978) no. 1, 13—22
- [63] 罗佩珠, 丁夏畦, *山东大学学报*, (1978), no. 2, 93—96
- [64] 丁夏畦, 罗佩珠, *系统科学与数学*, 1(1981), 9—33
- [65] J. Musielak, W. Orlicz, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 5(1957), 389—392
- [66] J. Musielak, W. Orlicz, *Studia Math.*, 18(1959), 11—41
- [67] R. Lesniewicz, W. Orlicz, *ibid.*, 45(1973), 71—109
- [68] 吴从妍, *科学探索*, (1981), no. 1, 97—98
- [69] H. H. Herda, *Studia Math.*, 30(1968), 21—42
- [70] J. Musielak, *Comment. Math. Prace Mat.*, 6(1961), 165—174
- [71] R. Taberski, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 9(1961), 441—444
- [72] D. Waterman, *Studia Math.*, 41(1972), 107—117
- [73] К. И. Осололков, *Ann. of Math.*, 2(1976), 41—47
- [74] Л. В. Салехов, ДАН СССР 116(1957), 355—358

- [75] 吴从焯, 哈尔滨工业大学学报, (1960), no. 1, 93—100
- [76] Л. В. Салехов, Украин. Матем. Ж., 20(1968), 66—77 [77] 吴从焯, 自然杂志, 3(1980), 712.
- [78] 吴从焯、刘铁夫, 数学研究与评论, (1981), no. 1, 43—54
- [79] Л. В. Салехов, Украин. Ж., 13(1961), 34—50
- [80] Л. В. Салехов, ИАН Азерб. ССР Матем., (1969), 49—55
- [81] R. Taberski, Comment. Math. Prace Mat., 5(1961), 33—42
- [82] 臧征, Bull. Acad. Polon. Sci., 8(1960), 675—679
- [83] V. Kokilashvili, ibid, 14(1966), 77—80 [84] А. Ямазанов, МГУ Матем., (1980).
- [85] М. Д. Григорьев, ИАН Азерб. ССР, 68(1979), 3—9
- [86] Т. А. Тотков, Докл. Болг. АН, 32(1979), 1033—1036
- [87] Z. Stypinski, Comment. Math. Prace Mat., 11(1968), 297—303
- [88] 李文林, 江西工学院学报, (1981), no. 2, 11—20
- [89] D. Landers, L. Rogge, Z. Wahrach. Vrew. Gebiete, 53(1980), 283—290
- [90] D. Landers, L. Rogge, Trans. Amer. Math. Soc., 267(1981), 259—264
- [91] J. Albrycht, Rozprawy Mat., 27(1962), 56pp.
- [92] Г. Я. Позановский, Ярославль, (1978), no. 2, 132—147.
- [93] 王声望, Bull. Acad. Polon. Sci., 7(1959), 107—110
- [94] A. Waszak, Comment. Math. Prace Mat., 11(1968), 229—246
- [95] A. Waszak, Funct. Approximatio Comment. Math., 2(1976), 269—275
- [96] A. Waszak, Comment. Math. Prace Mat., 12(1968), 115—139
- [97] A. Waszak, ibid, 15(1971), 217—234
- [98] A. Waszak, Fasc. Math., (1971), no. 5, 85—91
- [99] A. Waszak, Publ. Inst. Math. Beograd, 12(1971) 149—160
- [100] G. Weiss, Portugaliae Math., 15(1956), 35—47
- [101] В. М. Терпигорева, ИАН СССР, 142(1962), 38—41
- [102] R. Lesniewicz, Bull. Acad. Polon. Sci., 14(1966), 145—150
- [103] R. Lesniewicz, ibid, 15(1967), 227—281
- [104] R. Lesniewicz, Comment. Math. Prace Mat., 15(1971), 3—56
- [105] R. Lesniewicz, Studia Math., 46(1973), 53—77
- [106] R. Lesniewicz, ibid, 46(1973), 259—295 [107] R. Lesniewicz, ibid, 47(1973), 261—284.
- [108] 李文清, 厦门大学学报, (1964) [109] 陈文忠, ibid, (1965).
- [110] A. T. Bharuha—Reid, Bull. Acad. Polon. Sci., 4(1956)
- [111] A. T. Bharuha—Reid, Random integral equations, (1972)
- [112] K. Urbanik, W. A. Woyczynski, Bull. Acad. Polon. Sci., 15(1967), 161—169
- [113] A. Patricz, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A—B, 275(1972), A651—A672
- [114] D. Dacunha Castelle, M. Schreiber, ibid, 276(1973), A629—A631
- [115] M. M. Rao, J. Multivariable Anal., 1(1971), 129—157
- [116] N. Herrndorf, Z. Wahrach. Verw. Gebiete, 53(1980), 283—290
- [117] D. Landers, L. Rogge, ibid, 51(1980), 215—237
- [118] R. B. Darst, D. A. Legg, D. W. Townsend, Manuscripta Math., 35(1981), 99—103
- [119] J. Musielak, Studia Math., 21(1961), 195—202
- [120] J. Musielak, ibid, 21(1961), 217—244
- [121] J. Musielak, Bull. Acad. Polon. Sci., 9(1961), 765—767
- [122] J. Musielak, ibid, 15(1967), 261—263.
- [123] J. Magdziarz, Comment. Math. Prace Math, 11(1968), 305—312.
- [124] Ing—Yih S. Chang, John J. Kozak, J. Math. Phys., 13(1972), 51—53.