1986年10月

数学研究与评论
第六卷 第四期

σ-空间、Σ-空间及Heath-Hödel映象（下）*

高国士
（苏州大学）

Ⅱ．Heath—Hödel映象

§1．可展空间与$w\Delta$—空间

自从1966年第二次布拉格会议（第一次在1961年，以后每五年开一次）以后，广义度量空间理论的研究蓬勃开展（见Nagata〔48〕）．七十年代以来广义度量空间层见迭出，真如雨后春笋．学者们谋求统一处理的方法．这里介绍的Heath—Hödel映象是一种处理方法（§2），可用以统一地刻划一大部分广义度量空间，使能更好地理解掌握它们间的联系，同时也成为产生新的广义度量空间的泉源．

为行文方便，从Alexandroff—Urysohn度量化定理（〔1〕1923）讲起．

定理Ⅱ．1.1． 拓扑空间（T_1）X可度量化当仅当X具有开复盖序列$\{\mathscr{U}_n\}$满足下列条件：

（i）$\mathscr{U}_{n+1}$星加细$\mathscr{U}_n(n=1,2,3,\cdots)$（即对$x\in X$，$st(x,\mathscr{U}_{n+1})=\cup\{U: U\in\mathscr{U}_{n+1}, x\in U\}\subset\mathscr{U}_n$中某开集），（ii）对$x\in X$，$\{st(x,\mathscr{U}_n)\}$是点$x$的邻域基．

定义Ⅱ．1.1． 拓扑空间称为可展（developable）空间，如果存在开复盖序列$\{\mathscr{U}_n\}$满足定理Ⅱ．1.1的条件（ii）．正则可展空间称为Moore空间．

显然可展空间推广了度量空间，即度量空间→可展空间．

关于可展空间的推广，有拟可展（quasi—devolopable）空间（H. R. Bennett〔4〕1971）．

定义Ⅱ．1.2． 拓扑空间X称为拟可展空间，如果存在开集系序列$\{\mathscr{U}_n\}$使对$x\in X$，及开集$U\ni x$，存在自然数n使$st(x,\mathscr{U}_n)\neq\phi$且$st(x,\mathscr{U}_n)\subset U$．

显然，可展空间→拟可展空间．Bennett〔4〕证明了．

定理Ⅱ．1.2． 拟可展空间X是可展空间当仅当X的每一闭子集是G_δ集．

可展空间的另一推广是$w\Delta$-空间（C. J. F. Borges〔7〕1968）．

定义Ⅱ．1.3． 拓扑空间称为$w\Delta$-空间，如果存在开复盖序列$\{\mathscr{U}_n\}$满足条件

（ii′）对序列$\{x_n\}$，存在$x\in X$使$x_n\in st(x,\mathscr{U}_n)(n=1,2,\cdots)$，则$\{x_n\}$有聚点．

显然，定义Ⅱ．1.1中的条件（ii）蕴含这里的（ii′），所以可展空间→$w\Delta$-空间，事实上，在可展空间情况，相应于（ii′）中的序列$\{x_n\}$以点x为聚点．

*1982年5月4日收到，本文（上）刊于本刊第4卷（1984）第一期．

K. Morita的M-空间可以定义为具有开复盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 满足定义Ⅱ．1.1 的条件（i）及定义Ⅱ．1.3 的条件（ii'），所以M-空间→$w\Delta$-空间.

关于怎样的$w\Delta$-空间正好是可展空间，有著名的Burke定理（〔9〕1970）.

定理Ⅱ．1.3. 正则空间X是可展空间当仅当X是$w\Delta$-空间及$\sigma^{\neq}$-空间.

这与本文第Ⅰ部分的定理Ⅰ.2.11（T_2空间X可度量化当仅当X是M-空间及σ-空间）属于同一类型（类似于"因式分解"）. 这里$w\Delta$-空间是M-空间的推广. $\sigma^{\neq}$-空间是σ-空间的推广.

$w\Delta$-空间的推广有G. D. Creede〔14〕(1970）的拟完全（quasi-complete）空间. 他用以推广$w\Delta$-空间及p-空间.

定义Ⅱ．1.4. 拓扑空间X称为拟完全空间，如果存在开复盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}$. 对于序列$\{x_n\}$及某$x \in X$, $\{x_i: i \geq n\} \cup \{x\} \subset U_n \in \mathscr{U}_n$. 则 $\{x_n\}$ 有聚点.

显然，$w\Delta$-空间→拟完全空间. 此外，Creede〔14〕证明了p-空间→拟完全空间. 并提提出三者间的严格关系尚待解决. 同一年（1970），Burke〔9〕举了两个例:（i）全正则列紧空间（从而是$w\Delta$-空间，但不是p-空间),（ii）T_2局部紧空间（从而是p-空间、但不是$w\Delta$-空间),而R. F. Gittings〔24〕(1976）利用Burke的例得到一个全正则拟完全空间，它既不是$w\Delta$-空间又不是p-空间. 解决了Creede提出的问题. Creede〔14〕证明了

定理Ⅱ．1.4. 正则空间X是Moore空间当仅当X是拟完全空间及半层积空间.

定理Ⅱ．1.5. 全正则空间X是Moore空间当仅当X是p-空间及半层积空间.

Nagata〔18〕曾提出两个类型的广义度量空间:

第Ⅰ型：M-空间、p-空间及其它有关空间. 第Ⅱ型：M_3-空间、σ-空 其它有关空间.并列出五个性质,相当于本文第Ⅰ部分关于σ-空间的定理Ⅰ．2.3(可数积)、定理Ⅰ2.5(遗传性)、定理Ⅰ．2.6(可数和)、定理Ⅰ．2.2(闭映象）及定理Ⅰ．2.8(闭集族控制）所表述的性质. 指出第Ⅰ型的空间很少具有这些性质，第Ⅱ型的空间基本上具有这些性质 不同型的两类中各取其一，加以适当条件可用以"因式分解"地刻划某些空间. 上述定理，Ⅰ．2.12、Ⅱ．1.3、Ⅱ．2.4、Ⅱ．1.5 就是这样地分别刻划了度量、可展、Moore空间. 这里$w\Delta$-、拟完全空间属第Ⅰ型，半层积、$\sigma^{\neq}$-空间属第Ⅱ型. Σ-空间包含不同型的两类空间M-空间、σ-空间). 它的度量化定理Ⅰ．3.13、Ⅰ．3.14具有不同的形式.

§2. Heath—Hödel映象

1962年R. W. Heath〔25〕建立了一种映象. 设（X，$\mathscr{G}$）是拓扑空间，N是自然数集. 考察映象g：N×X→$\mathscr{G}$，满足对每一$x \in X$，$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} g(n, x)$. Heath〔25〕中用以刻划可展空间（定理Ⅱ2.1). 1965年，Heath〔26〕用以刻划层积空间（定理Ⅱ2.3)，从而1969年Heath在〔27〕中利用上述刻划证明了层积空间是σ-空间（定理Ⅰ．2.10)，初步显示了这种映象的效力. 1970年Creede〔14〕用以刻划半层积空间，从而证明了"可数个半层积空间的积空间是半层积空间". 1971年R. E. Hödel〔29〕改进Creede关于半层积空间的刻划定理Ⅱ．3.1的（C)），并利用〔25〕中对可展空间的刻划及相应的对$w\Delta$-空间的刻划(定理Ⅱ．2.2）研究了可展空间与$w\Delta$-空间的关系，发现了新的广义度量空间. 在总结以上结果的基础上，Hödel〔31〕系统地开展这映象的研究，得到了许多广义度量空间性质间的联系

并发现了许多新的广义度量空间，基于以上历史事实，本文把这一由Heath所创立，Hödel所发展的上述映象称为Heath—Hödel映象．

考察Heath—Hödel映象g：$N\times X\to\mathscr{S}$满足$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}g(n,\ x)$，$(x\in X)$（以下简称映象$g$）的下列条件：

（A）如果对每一$n\in N$，$\{p,\ x_n\}\subset g(n,\ y_n)$，则$\{x_n\}$以$p$为聚点．

（wA）如果对每一$n\in N$，$\{p,\ x_n\}\subset g(n,\ y_n)$，则$\{x_n\}$有聚点．

（B）如果对每一$n\in N$，$x_n\in g(n,\ p)$，则$\{x_n\}$以p为聚点．

（wB）如果对每一$n\in N$，$x_n\in g(n,\ p)$，则$\{x_n\}$有聚点．

Heath〔25〕证明了

定理Ⅱ．2.1． 拓扑空间X是可展空间当仅当存在映象g满足条件（A）．

由§1定义Ⅱ．1.3后的叙述，知相应地有

定理Ⅱ．2.2． 拓扑空间X是$w\Delta$-空间当仅当存在映象g满足条件（wA）．

显然，存在映象g满足条件（B）的空间正好是满足第一可数公理的空间，而存在映象g满足条件（wB）的空间正是Michael〔40〕所定义的q-空间．以上条件都是以具有某种性质的序列$\{x_n\}$有聚点去刻划相应的空间，而条件（wA）、（wB）分别弱于（A）、（B）．

关于层积空间的刻划有（Heath〔26〕）．

定理Ⅱ．2.3． 拓扑空间X是层积空间当仅当存在映象g满足条件：如果$x\in$闭集F，则对某些n，$x\overline{\in}[\bigcup\{g(n,\ y):\ y\in F\}]^{-}$．

Hödel〔29〕在考察Burke定理（定理Ⅱ．1.3）的证明过程中引进了新的广义度量空间．

定义Ⅱ．2.1． 拓扑空间X称为α-空间，如果存在映象g满足条件：

（i）$\bigcap_{n=1}^{\infty}g(n,\ x)=\{x\}$．（ii）如$y\in g(n,\ x)$则$g(n,\ y)\subset g(n,\ x)$．

并证明了下列两定理：

定理Ⅱ．2.4． $\sigma^{\#}$-空间是α-空间．

定理Ⅱ．2.5． 正则空间X是可展空间当仅当X是$w\Delta$-空间及α-空间．

上述定理形式上改进了Burke定理Ⅱ．1.3，实质上是一致的，因为$\sigma^{\#}$-空间与α-空间重合（见Nagata〔48〕）．

§3．序列$\{x_n\}$有聚点或以某点为聚点的情况

在这一节里用映象g刻划空间时，都借助于具有某些性质的序列$\{x_n\}$有聚点或以某点为聚点以刻划空间，如§2的条件：（A）、（wA）、（B）、（wB）．

1．半层积空间与β-空间 Hödel〔29〕证明了

定理Ⅱ．3.1． 拓扑空间X是半层积空间当仅当存在映象g满足条件：

（C）如果对每一$n\in N$，$p\in g(n,\ x_n)$，则$\{x_n\}$以p为聚点．

类似于性质（wA）、（wB）之弱于（A）、（B），自然考虑到以（C）的较弱形式定义新的空间（Hödel〔29〕）．

定义Ⅱ．3.1． 拓扑空间X称为β-空间，如果存在映象g满足条件：

（wC）如果对每一$n\in N$，$p\in g(n,x_n)$，则$\{x_n\}$有聚点．

Hödel〔30〕证明了

定理Ⅱ．3.2． Σ-空间是β-空间．

定理Ⅱ．3.3． 在正则空间X，下列条件等价（Hödel〔29〕）：

（i）X是半层积空间；（ii）X是β-空间且具有G^*-对角线；（iii）X是α-空间及β-空间．

关于G^*-对角线的定义见下．为此，先叙 Cede〔13〕定理．

定理Ⅱ．3.4． 拓扑空间X具有G_δ-对角线当仅当存在X的开复盖序列$\{\mathscr{U}_n\}$使对X中的不同两点x，y存在$n\in N$使$y\in st(x, \mathscr{U}_n)$．

定理Ⅱ．3.2． 拓扑空间X称为具有G^*-对角线，如果存在X的开复盖序列$\{\mathscr{U}_n\}$使对X中的不同两点x，y存在$n\in N$使y 〔$st(x, \mathscr{U}_n)$〕$^-$．

Hödel〔29〕证明了．

定理Ⅱ．3.5． 具有G^*-对角线的$w\Delta$-空间是可展空间．

2．N-空间与wN-空间 Nagata〔47〕(1957) 给出如下度量化定理．

定理Ⅱ．3.6． T_1空间可度量化，当仅当对每一$x\in X$，存在邻域系$\{U_n(x)\}$及$\{S_n(x)\}$满足下列条件：

（i）$\{U_n(x)\}$是点x的局部基底．(ii)对所有的$x, y\in X$，$S_n(x)\cap S_n(y)\neq\phi$，则$x\in U_n(y)$．(iii) 对所有的$x, y\in X$，$x\in S_n(y)$，则$S_n(x)\subset U_n(y)$．

定义Ⅱ．3.3． T_1空间X称为Nagata空间（简称为N-空间），如果对每一$x\in X$，存在邻域系$\{U_n(x)\}$及$\{S_n(x)\}$满足条件（i）及（ii）．

Ceder〔13〕证明了．

定理Ⅱ．3.7． 拓扑空间X是N-空间当仅当X是层积空间且满足第一可数公理．

Heath〔26〕(1965) 用映象g刻划N-空间．

定理Ⅱ．3.8． 拓扑空间X是N-空间当仅当存在映象g满足条件：

（D）如对每一$n\in N$，$g(n, p)\cap g(n, x_n)\neq\phi$则$\{x_n\}$以$p$为聚点．

从而Hödel〔31〕引进wN-空间．

定义Ⅱ．3.4． 拓扑空间X称为wN-空间，如果存在映象g满足条件：

（wD）如对每一$n\in N$，$g(n, p)\cap g(n, x_n)\neq\phi$，则$\{x_n\}$有聚点．

并证明了下列定理：

定理Ⅱ．3.9． wN-空间是列仿紧空间；β-空间是列弱仿紧空间（每一可列开复盖具有按点有限加细开复盖）．

定理Ⅱ．3.10． T_2、可展、wN-空间可度量化．

结合定理Ⅱ．3.5，有

定理Ⅱ．3.11． 设X是T_2、$w\Delta$-、wN-空间且具有G^*-对角线．则X可度量化．

Hödel〔31〕提出"是否每一正则半层积wN-空间是N-空间？"1974年W. F. Lindgren〔36〕正面地解决了这问题，证明了

定理Ⅱ．3.12． 正则、半层积、wN-空间是N-空间．

以上所涉及的广义度量空间的关系见图图1．其中有些关系文中未提及者可以比较映象g所满足的相应条件而得到．

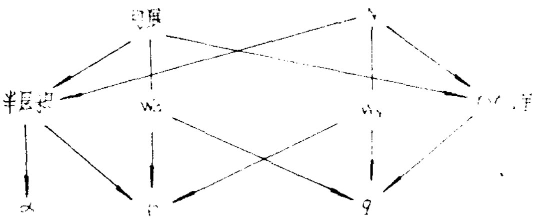

图 1

3．γ-空间与wγ-空间　Hödel〔31〕在证明定理Ⅱ．3.10的过程中，发现可以引入新的广义度量空间．

定义Ⅱ．3.5． 拓扑空间X称为γ-空间（$w\gamma$-空间），如果存在映象g满足条件（E）（(wE)）：

（E）如对每一$n\in N$，$y_n\in g(n,\ p)$及$x_n\in g(n,\ y_n)$，则$\{x_n\}$以p为聚点．

（wE）如对每一$n\in N$，$y_n\in g(n,\ p)$及$x_n\in g(n,\ y_n)$，则$\{x_n\}$有聚点．

Hödel〔31〕从而证明了下列定理：

定理Ⅱ．3.13． T_2、γ-、wN-空间是N-空间．

定理Ⅱ．3.14． β-、γ-空间是可展空间．

定理Ⅱ．3.15． β-、$w\gamma$-空间是$w\Delta$-空间．

定理Ⅱ．3.16． T_2、γ-、wN-空间可度量化．

4．θ-空间与wθ-空间　Hödel〔31〕又引进θ-空间以推广γ-空间及可展空间．

定义Ⅱ．3.6． 拓扑空间X称为θ-空间（$w\theta$-空间），如果存在映象g满足条件（F）（(wF)）：

（F）如对每一$n\in N$，$\{p,\ x_n\}\subset g(n,\ y_n)$及$y_n\in g(n,\ p)$，则$\{x_n\}$以$p$为聚点．

（wF）如对每一$n\in N$，$\{p,\ x_n\}\subset g(n,\ y_n)$及$y_n\in g(n,\ p)$，则$\{x_n\}$有聚点．

并证明了下列定理：

定理Ⅱ．3.17． 半层积、$w\theta$-空间是$w\Delta$-空间．

定理Ⅱ．3.18． 拓扑空间X是Moore空间当仅当X是正则半层积$w\theta$-空间．

定理Ⅱ．3.19． 拓扑空间X是可展空间当仅当X是半层积θ-空间．

这两段里所涉及空间的关系见图2．

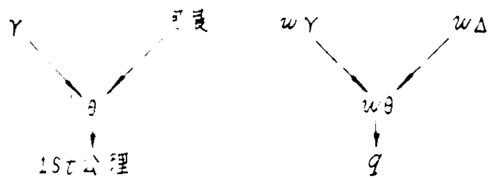

图2

5．wM-空间　T. Ishii〔33〕推广M-空间，引进wM-空间．

定义Ⅱ．3.7． 拓扑空间X称为wM-空间，如果存在开复盖序列$\{\mathscr{U}_n\}$，对序列$\{x_n\}$及$x\in X$，$x_n\in \mathrm{st}^2(x,\ \mathscr{U}_n)$，则$\{x_n\}$有聚点．

显然，$w\mathrm{M}\rightarrow w\Delta$．$w$M-空间可以用映象$g$刻划（Hödel〔31〕）．

定理Ⅱ．3.20． 拓扑空间X是wM-空间当仅当存在映象g满足条件：（wG）如对每一$n\in N$，$p\in g(n,\ z_n)$，$g(n,\ z_n)\cap g(n,\ y_n)\neq\phi$及$x\in g(n,\ y_n)$，则$\{x_n\}$有聚点．

比较条件（wG）与条件（wD）、(wE)，知$w\mathrm{M}\rightarrow w\mathrm{N}$，$w\mathrm{M}\rightarrow w\gamma$．其逆也真．Hödel〔31〕证明了．

定理Ⅱ．3.21． 设X是wN-及$w\gamma$-空间，则X是wM-空间．

此外，T. Shiraki〔57〕改进了定理Ⅰ．2.11．下面的定理Ⅱ．3.22可能是这方面的最好结果（见Nagata〔48〕）．

定理Ⅱ．3.22． T_2空间X可度量化当仅当它是wM-空间及$\sigma^{\#}$-空间．

6．wσ-空间　Heath-Hödel〔28〕利用映象g给出了正则空间情况下，σ-空间的三种刻划，其一是下面定理所述．

定理Ⅱ．3.23． 正则空间X是σ-空间当仅当存在映象g满足条件：

（H）对每一$n\in N$，$p\in g(n,\ y_n)$ 及$y_n\in g(n,\ x_n)$，则 $\{x_n\}$ 以 p 为聚点.

Fletcher-Lindgren〔21〕(1977) 由此以定义$w\sigma$-空间.

定义Ⅱ.3.8. 拓扑空间X称为$w\sigma$-空间，如果存在映象g满足条件：

（wH）对每一$n\in N$，$p\in g(n,\ y_n)$ 及$y_n\in g(n,\ x_n)$，则 $\{x_n\}$ 有聚点.

并证明了下列定理：

定理Ⅱ.3.24. $\Sigma^{\neq}$-空间是$w\sigma$-空间.

定理Ⅱ.3.25. wN-空间是$w\sigma$-空间.

定理Ⅱ.3.26. 设X是正则$\sigma^{\neq}$-空间及$w\sigma$-空间，则X是σ-空间.

7.Θ-空间与$w\Theta$-空间 Fletcher-Lindgren〔21〕又引进了Θ-空间及$w\Theta$-空间.

定义Ⅱ.3.9. 拓扑空间X称为Θ-空间（$w\Theta$-空间），如果存在映象g满足条件（Ⅰ）（(wI)）：

（Ⅰ）对每一$n\in N$，$\{x_n,\ p\}\subset g(n,\ y_n)$ 及 $\{y_n\}$ 有聚点，则 $\{x_n\}$ 以p为聚点.

（wI）对每一$n\in N$，$\{x_n,\ p\}\subset g(n,\ y_n)$ 及 $\{y_n\}$ 有聚点，则 $\{x_n\}$ 有聚点.

比较相应的条件，显然有：$\Theta\rightarrow\theta$，$w\Theta\rightarrow w\theta$及

定理Ⅱ.3.27. 拓扑空间X是可展空间当仅当X是Θ-空间及β-空间.

Fletcher-Lindgren〔21〕更证明了.

定理Ⅱ.3.28. 拓扑空间X是$w\Delta$-空间当仅当X是$w\Theta$-空间及β-空间.

并提出如下问题：（i）是否每一拟完全β-空间是$\Sigma^{\neq}$ $w\Delta$-空间？（ii）是否每一$w\sigma$-空间是$\Sigma^{\neq}$-空间?（iii）是否存在正规$w\Delta$-空间而不是$w\gamma$-空间？

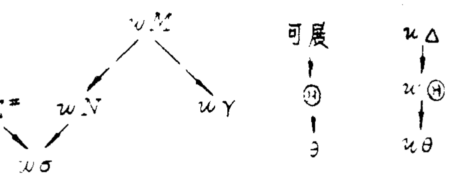

图3

以上三段所涉及的空间关系见图3：

§4. 广义列紧空间的积空间

前面所涉及的空间：$w\Delta$、q、β、wN、$w\gamma$、$w\theta$、wM、$w\sigma$、$w\Theta$都是以具有某种性质的序列 $\{x_n\}$ 有聚点刻划的，显然是列紧空间的推广. 此外，M、Σ、$\Sigma^{\neq}$(也可作类似的刻划) 也是列紧空间的推广. 按V. D. House〔32〕(1975)，这些空间都称为广义列紧空间，文中并提提出了广义列紧空间的可数积问题.

关于列紧空间的积，1938年E. Čech提出“两个列紧空间的积是否一定列紧?”1949年J. Novák制造了反例，否定地回答了Čech的问题. 这例详细地叙述在Novák〔50〕(1953). Z. Frolik〔22〕(1959) 曾改进这例. 改进后的形式载于R. Engelking的书〔17〕(1968). 近来，L. Parsons〔55〕(1977) 用Novák的技巧，给出了一个列紧空间X，使X×X是列仿紧空间但不是列紧空间. 另外，为了指出两个M-空间的积未必是M-空间，Ishiwata〔35〕(1968) 给出了两个列紧空间，它们的积甚至不是q空间. 基于上述背景，在考察广义列紧空间的可数积时，宜附加一些条件.

Ishii 等〔34〕证明了.

定理Ⅱ4.1. 可数个弱子序列式M-空间的积空间是弱子序列式M-空间.

House〔32〕扩充了上述结果（定理Ⅱ.4.2). 先叙述如下定义：

定义Ⅱ．4.1. 拓扑空间X称为子序列式的（subsequential），如果X中每一有聚点的序列具有收敛子序列.

定义Ⅱ．4.2. 拓扑空间X称为弱子序列式的（weakly subsequential），如果X中每一有聚点的序列具有有紧闭包的子序列.

定理Ⅱ．4.2. 设 $\{x_n\}_{n\in N}$是弱子序列式T_1空间形成的序列.$X=\times\{X_n,\ n\in N\}$ 是积空间.

（i）如果每一X_n是列紧空间，则X是弱子序列式列紧空间.（ii）如果每一X_n是$w\Delta$-空间，则X是弱子序列式$w\Delta$空间.（iii）如果每一X_n是q-空间，则X是弱子序列式q-空间.（iv）如果每一X_n是wN-空间，则X是弱子序列式wN-空间.（v）如果每一X_n是β-空间，则X是β-空间.（vi）如果每一X_n是Σ-空间，则X是Σ-空间.

House〔32〕所涉及的空间的关系见图4.

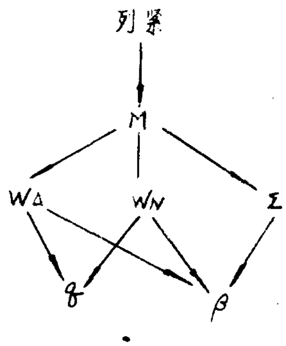

图4

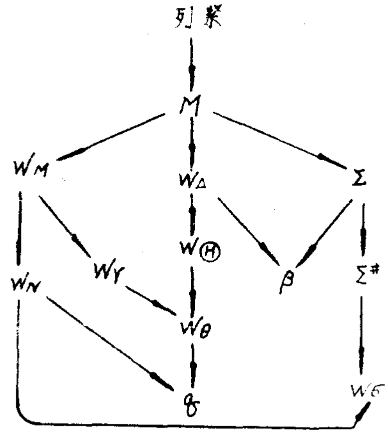

图5

由Ishiwata例知定理Ⅱ．4.2 的（i）—（iv）情况，假设条件“弱子序列式”不能去掉，但不知在（v）、（vi）情况（即Σ-空间、β-空间情况）此条件是否能去掉？

本节开始时所叙述的空间的关系见图5．按此图，House的结果是否可以推广到wM、$w\gamma$、$w\Theta$、$w\theta$、$w\sigma$、$\Sigma^{\#}$等空间[1)]？特别在$w\sigma$、$\Sigma^{\#}$情况，“弱子序列式”的假设是否可以不用？

参 考 文 献

〔1〕Alexandroff, P. and Urysohn, P., Une condition necessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D), C. R. Acad. Sci. Paris, 177(1923), 1274—1277.

〔2〕Alo, R. A. and Shaqiro, H. L., Normal topological spaces, Cambridge Tracts in Math., No. 65, 1974.

〔3〕Архангельский, А. В., Об одном классе пространств, содержащих все метрические и все локально бикомпактные пространства, ДАН 151, No. 4(1963), 751—754.

〔4〕Bennett, H. R., On quasi-developable spaces, Gen. Top. and Appl., 1(1971), 253—262.

〔5〕Berney, E. S., A regular Lindelöf semimetric space which has no countable network, Proc. Amer. Math. Soc., 26(1970), 361—364.

〔6〕Borges, C. R. J., On stratifiable spaces, Pacific J. Math., 17(1966), 1—16.

〔7〕________, On metrizability of topological spaces, Canad. J. Math., 20(1968), 795—804.

〔8〕Burke, D. K., On subparacompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 23(1969), 655—663.

〔9〕________, On p-spaces and $w\Delta$-spaces, Pacific J Math., 35(1970), 285—290.

1) 这问题已为吴利生，陈必胜正面地解决了，见江苏师院学报，1980，No.1，14—17.

〔10〕 ________________, Refinements of locally countable collections, Topology Proceedings, 4(1979), 19—27.

〔11〕 Burke, D. K. and Michael, E. A., On certain point-countable covers, Pacific J. Math., 64(1976), 79—92.

〔12〕 Burke, D. K. and Lutzer, D. J., Recent abvances in the theory of generalized metric spaces, Proc. Memphis State Topology Conference, 1975, 1—70.

〔13〕 Ceder, J., Some generalizations of metric spaces, Pacific J. Math., 11(1961), 105—125.

〔14〕 Creede, G., Concerning semistratifiable spaces, Pacific J. Math., 32(1970), 47—54.

〔15〕 Davis, S. W., Gruenhage, G. and Nyikos, P. J., G_δ-sets in symmetrizable and related spaces, Gen. Top. and Appl., 9(1978), 253—261.

〔16〕 Dieudonné, J., Une généraltzation des espaces compacts, J. Math. Pures Appl., 23(1944), 65—76.

〔17〕 Engelking, R., Outline of general topology, Wiley, New York, 1968.

〔18〕 Filipov. V. (Филиппов, B.B.), О перистых паракомпактах, ДАН 178, No.3(1968), 555—558.

〔19〕 Fleissner, W. G., A space with a σ-locally countable base, Ohio Univesity Topology Conference, 1979.

〔20〕 Fleissner, W. G. and Reed, G. M., Paralindelöf spaces and spaces with a σ-locally countable base, Topology Proceedings, 2(1977), 89—110.

〔21〕 Fletcher, P. and Lindgren, W. F., On $w\Delta$-spaecs, $w\sigma$-spaces and $\Sigma^{\#}$-spaces, Pacific J. Math., 71(1977), 419—428.

〔22〕 Frolik, Z., Generalizations of compact and Lindelöf spaces, Czech. Math. J., 9(84)(1959), 172—217.

〔23〕 ________________, On the topological product of paracompact spaces, Bull. Acad. Polon. Math. Ser., 8(1960), 747—750.

〔24〕 Gittings, R. F., Concerning quasi-complete spaces, Gen. Top. and Appl., 6(1976), 73—89.

〔25〕 Heath, R. W., Arc-wise connectedness in semi-metric spaces, Pacific J. Math., 12(1962), 1301—1319.

〔26〕 ________________, On open mappings and certain spaces satisfying the lst countability axiom, Fund. Math., 62(1965), 91—96.

〔27〕 Heath, R. W., Stratifiable spaces are σ-spaces, Notices Amer. Math. Soc., 17(1969), 761.

〔28〕 Heath, R. W. and Hödel, R. E., Characterizations of σ-spaces, Fund. Math., 77(1973), 271—275.

〔29〕 Hodel, R. E., Moore spaces and $w\Delta$-spaces, Pacific J. Math., 38(1971), 641—652.

〔30〕 ________________, Spaces characterized by sequences of covers which guarantee that certain sepuences have cluster points, Proc. Univ. Houston Topology Conference, 1971, 1—10.

〔31〕 ________________, Spaces defined by sequences of oqen covers which guarantee that certain sequences have cluster points, Duke Math. J., 39(1972), 353—363.

〔32〕 House, V. D., Countable products of generalized countably compact spaces, Pacific J. Math., 57(1975), 183—197.

〔33〕 Ishii, I., On wM-spaecs, I, II, Proc. Japan Acad., 46(1970), 5—15.

〔34〕 Ishii, I., Tsuda, M. and Kunugi, S., On the product of M-spaces, I, II, Proc. Japan Acad., 44(1968), 897—903.

〔35〕 Ishiwata, T., The product of M-spaces need not be M-spaces, Proc. Japan Acad., 45(1969), 154—156.

〔36〕 Lindgren, W. F., Every regular semistratifiable wM-space is a Nagata space, Notices Amer. Math. Soc., 21(1974), 74T—G89.

〔37〕 Michael, E. A., A note on paracompact space, Proc. Amer. Math. Soc., 4(1953), 831—838.

〔38〕 ________________, Another note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 8(1957),

822—828.
〔39〕 ________________, The product of a normal space and a metric space need not be normal, Bull. Amer. Math. Soc., 69(1963), 375—376.
〔40〕 ________________, A note on closed maps and compact sets, Israel J. Math., 2(1964), 173—177.
〔41〕 ________________, On Nagami's Σ-spaces and related metters, Proc. Wash. State University Conference on General Topology, (1969), 13—19.
〔42〕 ________________, Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable Cartesian products, Composito Math., 23(1971), 199—214.
〔43〕 ________________, σ-locally finite maps, Proc. Amer. Math. Soc., 65(1977), 159—164.
〔44〕 Michael, E. A. and Slaughter, F., A note on Σ-spaces with point-countable separating open covers. (to appear).
〔45〕 Morita, K., Products of normal spaces with metric spaces, Math. Ann., 154(1964), 365—382.
〔46〕 Nagami, K., Σ-spaces, Fund, Math., 65(1969), 160—192.
〔47〕 Nagata, J., A contribution to the theory of metrization, J. Inst. Polytech, Osaka City Univ., 8(1957), 185—192.
〔48〕 ________________, A survey of the theory of generalized metric spaces, Gen. Top. and its Relation to Modern Analysis and Algebra, Prague Symposium (1971), 321—331.
〔49〕 ________________, A note on Filipov's theorem, Proc. Japan Acad., 45(1969), 30—33.
〔50〕 Novák, J., On the Cartesian product of two compact spaces, Fund, Math., 40(1953), 106—112.
〔51〕 Okuyama, A., Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sec. A, 9(1967), 236—254.
〔52〕 ________________, σ-spaces and closed mappings, I., Proc. Japan Acad., 44(1968), 472—477.
〔53〕 Okuyama, A., A survey of the theory of spaces, Gen. Top. and Appl., 1(1971), 57—63.
〔54〕 ________________, On a gennralization of Σ-spaces, Pacific J. Math, 42(1972), 485—495.
〔55〕 Parsons, L., An example of a space which is countably compact whose square is countably paracompact but not countably compact, Proc. Amer. Math. Soc., 65(1977), 351—354.
〔56〕 Shiraki, T., M-spaces, their generalizations and metrization theorems, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku sect. A, 11(1971), 57—67.
〔57〕 ________________ On some metrization theorems. (to appear).
〔58〕 Siwiec, F. and Nagata, J., A note on nets and metrization, Proc. Japan Acad, 44(1968), 623—627.
〔59〕 Slaughter, F., Σ-spaces with point-countable separating open covers are σ-spaces, Research Rep. University of Pittsburgh. (to appear).
〔60〕 Sorgenfrey, R. H., On the topological product of paracompact spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 53(1947), 631—632.
〔61〕 Stoltenberg, R. A., A note on stratifiable spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 23(1969), 294—297.
〔62〕 Worrell, J. and Wicke, H., Characterizations of developable topological spaces, Canad. J. Math., 17(1965), 820—830.