p.n.p.矩阵的等价表征

逄　明　贤
（吉林师范学院）

矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，若其主子式皆非正，则称A为部分非正矩阵，简记作p.n.p.矩阵．特别地，主子式皆负的p.n.p.矩阵称为部分负矩阵，简记作p.n.矩阵．文〔1〕、〔2〕、〔3〕讨论了p.n.p.矩阵的谱性质．本文讨论p.n.p.矩阵与p.n.矩阵之间的联系，给出p.n.p.矩阵的两个等价表征．

引理1． 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为一p.n.p.矩阵（$n\ge 2$）．若 $a_{ii}\ne 0$，$i=1,2,\cdots,n$，而正对角阵 $D=\mathrm{diag}\,(d_{11},d_{22},\cdots,d_{nn})$ 满足 $0<d_{ii}\le|a_{ii}|$，$i=1,2,\cdots,n$．则

1）$\det(A+D)<\det A$；

2）$A+D$ 为非奇异p.n.p.矩阵，特别地，当 $0<d_{ii}<|a_{ii}|$ 时（$i=1,2,\cdots,n$），$A+D$ 为p.n.矩阵．

证． 对阶数用归纳法．当 $k=2$ 时，由 $a_{21}a_{12}\ge a_{11}a_{22}>0$ 以及 $0<d_{ii}\le|a_{ii}|$（$i=1,2$）知有 $0\le(a_{11}+d_{11})(a_{22}+d_{22})<a_{11}a_{22}\le a_{12}a_{21}$，即见 $\det(A+D)<\det A$．

设 $k<n$ 时结论为真．当 $k=n$ 时有

$$\det(A+D)=\begin{vmatrix} d_{11}+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & d_{22}+a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & d_{nn}+a_{nn}\end{vmatrix}=\alpha+\beta,$$

这儿

$$\alpha=\begin{vmatrix} d_{22}+a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & d_{nn}+a_{nn}\end{vmatrix}\cdot d_{11},\quad \beta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & d_{22}+a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & d_{nn}+a_{nn}\end{vmatrix}$$

易见，对 β 依次展开计算可知，其各项应为 $\det A$ 以及一个或若干个（至多 $n-1$ 个）d_{ii} 与A之某个 $n-1$ 阶或 n 阶主子式之积．由A为p.n.p.矩阵及 $d_{ii}>0$，立见其各项皆非正，可见 $\beta\le\det A$．再由归纳法假定以及 $d_{11}>0$ 知有

$$\alpha<d_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\le 0.$$

进而推出

$$\det(A+D)=\alpha+\beta<\det A.$$

* 1983年8月10日收到．

用上述同样的方法我们可以证得，对A + D之任一k阶主子式$(A+D)\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ i_1\cdots i_k \end{pmatrix}$

$(1\le i_1<\cdots<i_k\le n,\ k\ge 2)$亦有

$$(A+D)\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ i_1\cdots i_k \end{pmatrix} < A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ i_1\cdots i_k \end{pmatrix} \le 0 .$$

又显然A + D之主对角元$d_{ii}+a_{ii}\le 0$．立见A + D为非奇异p．n．p．矩阵．特别当$d_{ii}+a_{ii}<0$即若$0<d_{ii}<|a_{ii}|$时$(i=1,2,\cdots n)$，A + D为p．n．矩阵．

推论1．设$B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$为一p．n．p．矩阵，$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$与B有相同的非对角元．若$A\ge B$且$0\ge a_{ii}$ $(i=1,2,\cdots,n)$．则A为p．n．p．矩阵．特别地，当B非奇异时，A非奇异；当B为p．n．阵且$0<a_{ii}$时$(i=1,2,\cdots,n)$，A为$p.n.$阵．

证．记$D=\mathrm{diag}(a_{11}-b_{11},\ a_{22}-b_{22},\ \cdots,\ a_{nn}-b_{nn})$，则$D\geqslant 0$．仿引理1之证法可推得A = B + D之各阶主子式小于或等于B之相应各阶主子式，从而知A为$p.n.p.$矩阵，进而由$det\,A\leqslant det\,B$知，B非奇异亦有A非奇异．而当B为$p.n.$阵及$0>a_{ii}$ $(i=1,2,\cdots,n$时，A之各阶主子式显然为负，故A为$p.n.$矩阵．

利用引理1我们得到$p.n.p.$矩阵与$p.n.$矩阵的一个等价关系：

定理1．设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$满足$a_{ii}<0$ $(i=1,2,\cdots,n)$．则A为$p.n.p.$矩阵当且仅当对任一$0<\varepsilon<a_{ii}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$A+\varepsilon I$为$p.n.$矩阵．

证．必要性是引理1之特殊情况，故只须证充分性．记$B=A+\varepsilon I$．对主子式之阶数k用归纳法．$k=2$时，由假设知对任意$0<\varepsilon<|a_{ii}|$ $(i=1,2,\cdots,n)$总有

$$(a_{i_1i_1}+\varepsilon)(a_{i_2i_2}+\varepsilon)=a_{i_1i_1}+\varepsilon\ (a_{i_1i_1}+a_{i_2i_2})+\varepsilon^2<a_{i_1i_2}a_{i_2i_1}$$

令$\varepsilon\to 0$，即知$a_{i_1i_1}a_{i_2i_2}\le a_{i_1i_2}a_{i_2i_1}$．又显见$a_{i_1i_1}<0$，$a_{i_2i_2}<0$，故知A之一、二阶主子式皆非正．

假设$k-1$阶结论为真，看k阶情况．令$B\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ i_1\cdots i_k \end{pmatrix}$为B之任一$k$阶主子式

$(3\le k\ \ n)$，由B为p．n．阵知其为负．断言$A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ i_1\cdots i_k \end{pmatrix}\le 0$．否则，若

$A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ i_1\cdots i_k \end{pmatrix}>0$，于是将$B\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ i_1\cdots i_k \end{pmatrix}$展开计算可得

$$B\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ i_1\cdots i_k \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1i_1}+\varepsilon & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2}+\varepsilon & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}+\varepsilon \end{vmatrix}=\alpha(\varepsilon)+\beta(\varepsilon),$$

这儿$\alpha(\varepsilon)=\begin{vmatrix} a_{i_2i_2}+\varepsilon & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}+\varepsilon \end{vmatrix}\varepsilon$，$\beta(\varepsilon)=\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2}+\varepsilon & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}+\varepsilon \end{vmatrix}$．

继续对$\beta(\varepsilon)$展开计算可得

$$\beta(\varepsilon)=A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{pmatrix}+\gamma(\varepsilon),$$

其中$\gamma(\varepsilon)$是一个或若干个ε(至多$k-1$个)同A之某一阶数$\leq k-1$的主子式乘积的和. 故当$\varepsilon\to 0$时, $\gamma(\varepsilon)\to 0$. 进而由

$$B\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{pmatrix}=\alpha(\varepsilon)+\gamma(\varepsilon)+A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{pmatrix},$$

以及$\varepsilon\to 0$时, $\alpha(\varepsilon)\to 0$, 知对充分小的$\varepsilon>0$应有$A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{pmatrix}>|\alpha(\varepsilon)+\gamma(\varepsilon)|$,

这就导致$B\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{pmatrix}\geq 0$的矛盾.

易见, 我们可以把定理1改成更一般的形式:

推论2. 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$满足$a_{ii}<0$ ($i=1,2,\cdots,n$). 则A为p.n.p.矩阵, 当且仅当对任一对角元满足$0<d_{ii}<|a_{ii}|$ ($i=1,2,\cdots,n$)之正对角阵$D=\mathrm{diag}(d_{11},d_{22},\cdots,d_{nn})$, $A+D$为p.n.矩阵.

下面我们首先讨论非奇异p.n.p.矩阵与其逆矩阵主子式之间的关系.

引理2. 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为一p.n.矩阵. 则$A^{-1}$的任一$k$阶顺序主子式为正($1\leq k\leq n-1$).

证. 设$B=A^{-1}$. 把B分块为$B=\begin{pmatrix} B_r & B_p \\ B_q & B_s \end{pmatrix}$, 其中$B_r$为B之$r$阶顺序主子阵($1\leq r\leq n-1$) B_s为B之$n-r$阶主子阵. 同样地, 把A做与B相同的分块$A=\begin{pmatrix} A_r & A_p \\ A_q & A_s \end{pmatrix}$

则由A为p.n.矩阵即知A_r, A_s分别为r阶与$n-r$阶p.n.矩阵. 直接计算可得

$$\begin{pmatrix} A_r & A_p \\ A_q & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_r & B_p \\ B_q & B_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_rB_r+A_pB_q & A_rB_p+A_pB_s \\ A_qB_r+A_sB_q & A_qB_p+A_sB_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}.$$

由此推得$A_qB_r+A_sB_q=0$或$B_q=-A_s^{-1}A_qB_r$. 将其代入到$A_rB_r+A_pB_q=I_r$中又得到

$$(A_r-A_pA_s^{-1}A_q)B_r=I_r.$$

此即推出B_r非奇异, 且有$\det(A_r-A_pA_s^{-1}A_q)=1/\det B_r$.

另一方面, 把A左乘以矩阵$\begin{pmatrix} I_r & -A_pA_s^{-1} \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$又得

$$\begin{pmatrix} I_r & -A_pA_s^{-1} \\ 0 & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_r & A_p \\ A_q & A_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_r-A_pA_s^{-1}A_q & 0 \\ A_q & A_s \end{pmatrix}.$$

由此推得

$$\det A=\det A_s\cdot\det(A_r-A_pA_s^{-1}A_q)=\det A_s/\det B_r,$$

即是$\det A\cdot\det B_r=\det A_s$. 由A与$A_s$皆为p.n.矩阵知$\det A<0$, $\det A_s<0$, 故必$\det B_r>0$. 注意$1\leq r\leq n-1$之任意性, 即知引理为真.

完全类似地我们可以证明, p.n.矩阵A的逆A^{-1}之后k行k列组成的k阶主子式亦为正($1\leq k\leq n-1$). 由此我们可以进一步推出

定理2. 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为一p.n.矩阵. 则$A^{-1}$的所有$k$阶主子式为正($1\leq k\leq n-1$).

证．设$B\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{bmatrix}$为$B=A^{-1}$之某一$k$阶主子阵（$1\leq k\leq n-1$）．则有在一$n$阶置换阵P使得$\widetilde{B}=PBP^T$之$k$阶主要主子阵恰为$B\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{bmatrix}$．显然$\widetilde{B}^{-1}=PB^{-1}P^T=PAP^T$亦为$n$阶p．n．矩阵．故由引理即知

$$B\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{pmatrix}=\det\ B\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{bmatrix}>0\text{．}$$

由此，我们可以得到一个判定矩阵为p．n．矩阵的等价条件：

定理 3．设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$．则A为p．n．矩阵当且仅当A非奇异且满足$\det A^{-1}<0$及$A^{-1}$之任一$k$阶主子式为正（$1\leq k\leq n-1$）．

证．只须证明充分性．易见，A为p．n．矩阵当且仅当对任一n阶置换阵P，PAP^T为p．n．矩阵．因之在此定理条件假设之下我们只须证明A的主要主子式皆为负．

由引理2之证明过程可知，对A之任一k阶主要主子阵A_k应有（$1\leq k\leq n-1$）

$$\det A_k=\det A\cdot\det B_{n-k}\text{，}$$

这儿B_{n-k}为$B=A^{-1}$之后$n-k$行与$n-k$列组成的$n-k$阶主子阵．注意到$B=A^{-1}$之任一k阶主子式皆为正（$1\leq k\leq n-1$）以及$\det A^{-1}$与$\det A$同号，立见$\det A_k<0$,（$1\leq k\leq n-1$）．又$\det A<0$，故A为p．n．矩阵．

联系定理1，我们得到一个p．n．p．矩阵的判定准则：

推论3．设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$满足$a_{ii}<0$（$i=1,2,\cdots,n$）．则A为p．n．p．矩阵当且仅当对任一$0<\varepsilon<|a_{ii}|$（$i=1,2,\cdots,n$），$A-\varepsilon I$非奇异且满足$\det(A-\varepsilon I)^{-1}<0$及$(A-\varepsilon I)^{-1}$之任一$k$阶主子式为正（$1\leq k\leq n-1$）．

或者等价地表述为

推论4．设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$满足$a_{ii}<0$（$i=1,2,\cdots,n$）．则A为p．n．p．矩阵当且仅当对任一对角元满足$0<d_{ii}<|a_{ii}|$（$i=1,2,\cdots,n$）之正对角阵$D=\mathrm{diag}(d_{11},d_{22},\cdots,d_{nn})$，有$A-D$非奇异，而且$(A-D)^{-1}$之$n$阶主子式为负，任一阶数$<n$之主子式为正．

对于非奇异p．n．p．矩阵我们有类似的结论．

推论5．设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为一非奇异p．n．p．矩阵．则$A^{-1}$的所有$k$阶主子式为非负（$1\leq k\leq n-1$）．

证．事实上，若设$A^{-1}=B$之某一r阶主子式为负，不妨设B之r阶主要主子式$\det B_r$为负（$r<n$）．则由引理2知有$\det A\cdot\det B_r=\det A_s$，这儿$A_s$为A之后$n-r$行与$n-r$列构成的主子阵．因$\det A<0$又$\det B_r<0$立得$\det A_s>0$此矛盾于A为p．n．p．矩阵．

由此我们进一步得到一个非奇异p．n．p．矩阵的等价准则．

推论6．设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$．则A为非奇异p．n．p．矩阵当且仅当A非奇异且满足$\det A^{-1}<0$及A^{-1}之任一k阶主子式非负（$1\leq k\leq n-1$）．

最后，我们给出非奇异p．n．p．矩阵的一个重要性质．

定理4．设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为一非奇异p．n．p．矩阵，则A为不可约矩阵．

证．若A为可约，则应有n阶置换阵P使

$$PAP^T = \widetilde{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ O & \widetilde{A}_{22} \end{bmatrix},$$

这儿$\widetilde{A}_{11}$与$\widetilde{A}_{22}$为方阵（$\widetilde{A}_{11}$阶数小于n）进而知有$\det A = \det \widetilde{A}_{11} \det \widetilde{A}_{22}$．注意$\widetilde{A} = PAP^T$亦为非奇异p.n.p.矩阵，故由$\det \widetilde{A}_{11} < 0$及$\det \widetilde{A}_{22} < 0$导出$\det A > 0$，此与A为非奇异p.n.p.矩阵矛盾．

联系〔3〕之定理6我们得到

推论7． 设$A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$为一非奇异p.n.p.矩阵，且当$j > i$时（或$i > j$时）$a_{ij} < 0$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$．则

1）A有一负特征值λ_1使$|\lambda_1| = \rho(A)$，对应于λ_1的特征向量为正向量；

2）λ_1满足

$$\max\{\min_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,\ \beta_0 - \frac{1}{r}\} \leq |\lambda_1| \leq \mathrm{mim}\{\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,\ \beta_0 - \frac{1}{R}\},$$

其中$\beta_0 > \max_i |a_{ii}|$, $B_0 = \beta_0 I + A$, $B_0^{-1} = (\widetilde{b}_{ij})_{n\times n}$，$r = \min_i \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{ij}$，$R = \max_i \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{ij}$．

作者衷心地感谢南京大学佟文廷副教授对本文的热情指导与帮助．

参 考 文 献

〔1〕Johnson. J. J., On partially non—positive matrices, Linear Algebra Appl., 8 (1974), 185—187.

〔2〕逄明贤，关于p.n.p.矩阵的谱性质，数学研究与评论，Vol.6 (1986)，No.1.

〔3〕逄明贤，p.n.p.矩阵的一些性质，数学研究与评论，Vol.6 (1986)，No 3.