富里算子及共轭变换的弱有界性*

潘文熙 谢慧满
（暨南大学）

§1 引 言

熟知的，在富里分析中，设$f(x)$是2π周期可积函数（记作$f\in L^1_{2\pi}$或L^1）．$S_n(f,x)$是f的富里级数$\mathscr{F}(f)$的部分和．存在绝对常数A(只与p有关的)，使对任意$f(x)\in L^p_{2\pi}$（$1<p<\infty$），则$\|S_n(f,x)\|_p<A\|f\|_p$．这里$\|\cdot\|_p$表示L^p范数．这时我们说算子列T_n：$f\to S_n$是一致（p,p）型的．也就是从L^p到L^p的有界算子，且算子范数列有界．但T_n不是一致（1,1）型的．

若以$\widetilde{f}(x)$表示$f(x)$的共轭函数$\widetilde{f}(x)=\frac{-1}{\pi}\int_{\to 0}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\ \mathrm{tg}\ /2}\mathrm{d}t$，那么当$p>1$．共轭变换$U$：$f\to\widetilde{f}$是（$p,p$）型算子$\|\widetilde{f}\|_p<A\|f\|_p$．但$p=1$不成立．存在$f\in L^1$但$\widetilde{f}\notin L^1$．见Zygmund〔1〕第七章．

针对$p=1$情形，Calderon′〔4〕，〔5〕、〔6〕首先研究并证明了U是弱（1，1）型（我们叫这是Calderon-Zygmund定理），并且对于$(-\infty,\infty)$上的情形，$f\in L^1(-\infty,\infty)$的Hilbert变换

$$\overline{f}(x)=\frac{-1}{\pi}\int_{\to 0}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\mathrm{d}t.$$

V：$f\to\overline{f}$也是弱（1，1）型的．（也见Loomis〔2〕）．所谓从$L^p(\Omega)$映入Ω上可测函数类$S(\Omega)$中的算子$f\to g$叫做弱（p,q）型的（$p,q\geq 1$），乃是存在绝对常数A(只可以依赖于p，q）使$N_q(g)<A\|f\|_p$．这里

$$N_q(g)=\sup_{a>0}a\,\mathrm{mes}[x\in\Omega\ \big|\ |g(x)|>a]^{1/q}\qquad(\text{mes—Lebesgue测度})$$

弱（p,q）型是（p,q）型的推广（弱化），因为当$g(x)\in L^q(\Omega)$，则任意$a>0$．$a^q\mathrm{mes}[x\in\Omega\mid|g(x)|>a]=\int_{[x\mid |g|>a]}a^q\mathrm{d}x\leq\int_\Omega|g(x)|^q\mathrm{d}x$，故此$N_q(g)\leq\|g\|_q$．

同样，定义算子列$f\to g_n$为一致弱（p,q）型的，乃是$N_q(g_n)<A\|f\|_p$，A与n也无关．

本文的任务先是证明T：$f\to S_n$是一致弱（1，1）型的．同样对$(-\infty,\infty)$上$f(x)$的富里单积分$S_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\mathrm{d}t$（$\lambda\to\infty$）我们证明它是一致（$p,p$）型（$p>1$）及一致弱（1，1）型的，但不是（1，1）型的．这样命题，将扩展到Stieltjes级数与积分情形，就$\mathscr{F}(\mathrm{d}F)$说，这时相应的共轭函数是$\widetilde{f}(x)=V\cdot P\cdot\frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}F(t)}{2\ \mathrm{tg}\frac{t-x}{2}}$弱有界关系换

* 1983年12月21日收到．

成$N_1(\widetilde{f})<A\|F\|_V$，$\|F\|_V$表示有界变分函数$F(t)$在〔$-\pi,\pi$〕的全变分，与此同时，$(-\infty,\infty)$上Hilbert-Stieltjes变换的相应命题是$N_1(\widetilde{f})<A\|F\|_{V(-\infty,\infty)}$. 已见于Butzer-Nessel〔7〕第八章8.15.

再一个问题是若限制f于$L^1_{2\pi}$中的一个子集$D_1=\{f\in L^1_{2\pi}\mid \widetilde{f}\in L^1_{2\pi}\}$，是不是$U_n$在$D_1$上有可能成为（1,1）型呢？即是否存在绝对常数$A$，使$\|\widetilde{f}\|_1<A\|f\|_1$，对任意$f\in D_1$成立呢？本文将否定之．与本文同时，若考虑富里变换（有限、无限）等若干线性算子的弱有界性问题及准范数的一些基本性质，写成于〔9〕，本文暂不论及．

§2 $f\to S_n$，$f\to S_\lambda$的一致弱（1,1）有界性研究

引理1 若线性算子$f\to H(x)$是弱（p,q）型的，则线性算子$f\to H(x)\cos nx$或$f\to H(x)\cdot\sin nx$都是一致弱（p,q）型的（对n一致地）.

因为任意$a>0$，集合〔$x\mid |H(x)\cos nx|>a$〕$\subset$〔$x\mid |H(x)|>a$〕，而$a\,\text{mes}$〔$x\mid |H(x)|>a$〕$^{1/q}<A\|f\|_p$，故此，$a\,\text{mes}$〔$x\mid |H(x)\cos nx|>a$〕$^{1/q}<A\|f\|_p$另一个同理证出．

引理2 线性算子T_1：$f\to g_1$，T_2：$f\to g_2$都是弱（p,q）型的，则T：$f\to g_1+g_2$也是弱（p,q）型的．

因为对$a>0$，

$$a\,\text{mes}〔x\mid |g_1+g_2|>a〕^{1/q}\le a\,\text{mes}〔x\mid |g_1|>\frac{a}{2}〕^{1/q}+a\,\text{mes}〔x\mid |g_2|>\frac{a}{2}〕^{1/q}$$
$$\le 2A_1\|f\|_p+2A_2\|f\|_p=A_3\|f\|_p\qquad (A_1,A_2,A_3\text{是绝对常数}).$$

定理1 设$S_n=S_n(x)=S_n(f,x)$为f的富里级数的部分和，则算子列T：$f\to S_n$是一致弱（1，1）型的；就是存在与x,f,n无关的常数A，使得对任意$f\in L^1_{2\pi}$与$a>0$都有

$$a\,\text{mes}〔x\in〔0,\ 2\pi〕\mid |S_n(f,x)|>a〕<A\int_0^{2\pi}|f(x)|dx.$$

证明 命$A_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx$，$a_n$，$b_n$是$f(x)$的富里系数，先取修改和式

$$S_n^*(x)=\sin nx\widetilde{g}(x)-\cos nx\widetilde{h}(x).\quad S_n^*(x)=S_n(x)-\frac{1}{2}A_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x+t)\frac{\sin nt}{2\text{tg}\frac{t}{2}}dt$$

所以$S_n^*(x)=\sin nx\widetilde{g}(x)-\cos nx\widetilde{h}(x)$．这里$g(x)=f(x)\cos nx$，$h(x)=f(x)\sin nx$，$\widetilde{g}(x)$，$\widetilde{h}(x)$分别是它们的共轭函数，显然$\|g\|_1\le\|f\|_1$，又$g\to\widetilde{g}$是弱（1，1）型的（Calderon—Zygmund定理）．用引理1，对任意$a>0$，

$$a\,\text{mes}〔x\mid |\widetilde{g}\sin nx|>a〕\le a\,\text{mes}〔x\mid |\widetilde{g}|>a〕\le A\|g\|_1\le A\|f\|_1.$$

故$f\to\sin nx\widetilde{g}(x)$是一致弱（1,1）型的．同理$f\to\cos nx\widetilde{h}(x)$也是一致弱（1,1）型的．用引理2，$\therefore f\to S_n^*(f)$是一致弱（1,1）型的．又因$S_n(f)=S_n^*(f,x)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+t)\cos nt\,dt$，末项与$f$的对应是一致（1，1）型的，故此$f\to S_n$是一致弱（1，1）型的．证完．

对于$f(x)\in L^1(-\infty,\infty)$，相应$f$的富里单积分

$$S_\lambda(x)=S_\lambda(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}dt.$$

首先，不能指望$f\to\widetilde{S}_\lambda$是一致（1，1）型的，因为可以作成特例$f^*\in L^1(-\infty,\infty)$，而$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|S_\lambda(f^*,x)|dx=+\infty$，事实上，在富里级数论中存在$g\in L^1_{2\pi}$，使$\int_0^{2\pi}|S_n(g,x)|dx$无界，今命

$$f^*(x)=\begin{cases}g(x) & \text{当 } 0\le x<2\pi\\ 0 & \text{其它}x\end{cases},\qquad \text{则 } f^*\in L^1(-\infty,\infty)\text{ 而}$$

$$S_{\lambda}(f^{*}, x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} g(t)\,\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\mathrm{d}t$$

今存在$\lambda_n\to\infty$使$\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} g(t)\,\dfrac{\sin\lambda_n(t-\pi)}{t-x}\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\to+\infty$ （$n\to\infty$） 而有$\int_0^{2\pi}|S_{\lambda_n}(f^{*}, x)|\mathrm{d}x\to+\infty$，故$\int_{-\infty}^{\infty}|S_{\lambda_n}(f^{*}, x)|\mathrm{d}x\to+\infty$.

现在建立$f\to S_{\lambda}(f, x)$的一些有界性质.

定理 2 对$1<p<\infty$，$f\to S_{\lambda}$是一致(p, q)型的，且一致弱（1，1）型的.

证明 我们根据Hilbert变换$f\to\overline{f}$是(p, p)型的$(p>1)$及弱（1，1）型的事实（见Butzer-Nessel〔7〕第八章8.1.12及8.15）来看

$$S_{\lambda}(x)=\frac{\cos\lambda a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\sin\lambda t}{t-x}\mathrm{d}t-\frac{\sin\lambda x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\cos\lambda t}{t-x}\mathrm{d}t$$

命$f_1(t)=f(t)\sin\lambda t$，$f_2(t)=f(t)\cos\lambda t$. $f\to f_1$，$f\to f_2$显然都是一致(p, p)型$(p>1)$.一致弱（1，1）型的，$\overline{f_1}$，$\overline{f_2}$分别表示f_1，f_2的Hilbert变换，这变换也是(p, p)型$(p>1)$及弱（1，1）型的. 用引理1，2，故此$f\to S_{\lambda}$是一致弱（1，1）型的，同时对$p>1$. 则

$$\|S_{\lambda}\|_p\leq\|\cos\lambda x\overline{f_1}\|_p+\|\sin\lambda x\overline{f_2}\|_p\leq A\|f_1\|_p+A\|f_2\|_p=2A\|f\|_p.$$

故$f\to S_{\lambda}$是一致(p, p)型的，证完.

若富里级数及富里积分推广到Fourier-Stieltjes情形，相应富里部分和及富里单积分记作$S_n(\mathrm{d}F, x)$，$S_{\lambda}(\mathrm{d}F, x)$，则以上一致弱（1，1）的命题还可以推广成为以下不等式.

$$N_1(S_n(\mathrm{d}F, x))<A\|F\|_{V[0,\,2\pi]},\quad N_2(S_{\lambda}(\mathrm{d}F, x))<A\|F\|_{V(-\infty,\,\infty)}$$

但要先建立Stieltjes共轭变换及Hilbert-Stieltjes变换的相应弱有界性为依据，因此留在下节一起解决.

§3 Stieltjes型算子的弱有界性及共轭变换非（1.1）型问题

设$F(x)\in BV[0, 2\pi]$，凡展拓到$(-\infty, \infty)$都按照2π周期差距平移性，即$F(x+2\pi)-F(x)=F(x'+2\pi)-F(x')$，对任意$x, x'\in(-\infty, +\infty)$成立，这样一来，则凡周期函数$\phi(t)$积分$\int_0^{2\pi}\phi(t)\mathrm{d}F(t)$（如果有限存在）的区间$[0, 2\pi]$可以换成任何一个$2\pi$长的区间，积分的值不变，对于$\mathscr{S}[\mathrm{d}F]$，相应的共轭函数是$\widetilde{f}(x)=\dfrac{-1}{\pi}\mathrm{V.P.}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\mathrm{d}F(t)}{2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}$，联系到$(-\infty, \infty)$上的情形，$F(t)\in BV(-\infty, \infty)$的Hilbert-Stieltjes变换，即

$\overline{F}(t)=\dfrac{-1}{\pi}\mathrm{V.P.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}F(t)}{t-x}$，对于它Loomis〔2〕已证明了

Loomis定理 $\overline{f}(x)$几乎处处存在（有限），且对任何$a>0$，有$\mathrm{mes}\{x\in(-\infty, \infty)\mid|F(x)|>a\}\leq\dfrac{A}{a}\|F\|_{V(-\infty,\,\infty)}$ $A=128$.（也见Butzer-Nessel〔7〕8.1.5）

但似乎未见周期函数情形$\widetilde{f}$的相应论述. 为此，我们先根据Loomis定理证明以下命题.

定理 3 $F(t)\in BV[-\pi, \pi]$，则$\forall a>0$，存在绝对常数A，有$\mathrm{mes}\{x\in[-\pi, \pi]\mid|\widetilde{f}(x)|>a\}\leq\dfrac{A}{a}\|F\|_{V[-\pi,\,\pi]}$.

证明 因为对 $|x|\leq\pi$，我你有 $\left|\dfrac{1}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}-\dfrac{1}{x}\right|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\dfrac{x}{2k\pi(x-2k\pi)}\right|\leq\dfrac{\pi}{6}$ Σ'表示没有$k=0$项的级数和（将$F(t)$作为2π差距平移函数展拓出）区间$[c,d]\subset(-\infty,\infty)$的特征函数为$\chi_{[c,d]}(x)$，命$F_1(x)=\chi_{[-2\pi,2\pi]}(x)F(x)(-\infty,\infty)$．则$F_1(x)\in BV(-\infty,\infty)$，且$\|F_1\|_{V[-\infty,\infty]}\leq 2\|F\|_{V[-\pi,\pi]}$ 并且当 $|x|\leq\pi$，$|u|\leq\pi$时$F(x-u)=F_1(x-u)$．于是当$|x|\leq\pi$，有

$$\widetilde{f}_\delta(x)\doteq\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)\frac{dF(t)}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\frac{dF(t)}{x-t}+\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\frac{1}{x-t-2k\pi}+\frac{1}{2k\pi}\right\}dF_1(t).$$

右方第一项为$\dfrac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right)\dfrac{dF_1(t)}{x-t}$．记作$\overline{f}_\delta(x)$，右方末项绝对值$\leq\dfrac{1}{6}\|F_1\|_{V(-\infty,\infty)}\leq\dfrac{1}{3}\|F\|_{V[-\pi,\pi]}$．

所以
$$|\widetilde{f}_\delta(x)-\overline{f}_\delta(x)|\leq\frac{1}{3}\|F\|_{V[-\pi,\pi]}$$

当$\delta\to0$它们各都对几乎处处的x极限存在．系数无妨放大一些改成 1．故而$|\widetilde{f}(x)-\overline{f}(x)|\leq\|F\|_{V[-\pi,\pi]}$对$|x|\leq\pi$中几乎处处的$x$成立．为了建立所要证的不等式，不妨命$\|F\|_V=1$．当$|x|\leq\pi$，$|\overline{f}(x)|<\dfrac{a}{2}$ $(a>0)$，限制$a\geq2$时$|\widetilde{f}(x)|\leq|\overline{f}(x)|+\|F\|_V\leq\dfrac{a}{2}+1\leq a$．故

$E_a\doteq[x\in[-\pi,\pi]\,\big|\,|\widetilde{f}(x)|>a]\subset[x\in(-\infty,\infty)\,\big|\,|\overline{f}(x)|>\dfrac{a}{2}]\cup e_0$，$e_0$是零集．从而$\operatorname{mes}E_a\leq\operatorname{mes}[x\in(-\infty,\infty)\,\big|\,|\overline{f}|>\dfrac{a}{2}]\leq\dfrac{2A}{a}\|F_1\|_{V(-\infty,\infty)}\leq\dfrac{4A}{a}\|F\|_{V[-\pi,\pi]}$．

故对于$a\geq2$的a已证出不等式．当$0<a<2$时，$\operatorname{mes}E_a\leq2\pi<\dfrac{A}{a}$，只要选$A>4\pi$即可满足．

现在根据定理 3 可处理富里Stieltjes算子情形$S_n(dF,x)$，$S_\lambda(dF,x)$的弱有界性．仍然用修改和$S_n^*(dF,x)=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\dfrac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dF(x+t)=S_n(dF,x)-\dfrac{1}{2}A_n(x)$．化成$S_n^*(dF,x)=$

$$\sin nt\frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n(x+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dF(x+t)-\cos nt\frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin n(x+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dF(x+t)$$ 命

$\Phi(u)=\int_0^u\cos nt\,dF(t)$，$\Psi(u)=\int_0^u\sin nt\,dF(t)$，它们是BV的．$\|\Phi\|_{V[0,2\pi]}\leq\|F\|_{V[0,2\pi]}$．

$\|\Psi\|_{V[0,2\pi]}\leq\|F\|_{V[0,2\pi]}$而$S_n^*(dF,x)$表达式相应的两项中$\sin nx$，$\cos nx$的因子分别就是$\Phi$、$\Psi$的Stieltjes共轭函数，由定理 3 及引理 1 类似推理知，$\forall a>0$有

$$\operatorname{mes}[x\in[0,2\pi]\,\big|\,|S_n^*(dF,x)|>a]<\frac{A_1}{a}\|\Phi\|_V+\frac{A_1}{a}\|\Psi\|_V\leq\frac{2A_1}{a}\|F\|_V$$

又对于$\dfrac{1}{2}A_n(x)$，由于$\dfrac{1}{2}A_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt\,dF(x+t)$，

$$N_1\left(\frac{1}{2}A_n(x)\right)\leq\left\|\frac{1}{2}A_n(x)\right\|_1<A_2\|F\|_V.$$

总之，有 $N_1(S_n(\mathrm{d}F,\ x))<A\|F\|_{\mathrm{V}[0,\ 2\pi]}$.

与此同时，对于Fourier—Stieltjes单积分

$$S_\lambda(\mathrm{d}F,\ x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\mathrm{d}F(t),$$

用类似定理2一致弱（1，1）有界性的证明方法，应用于Loomis定理，乃得到：

定理 4 （i）$F(t)\in \mathrm{BV}[0,\ 2\pi]$，则对于Fourier-Stieltjes级数$\mathscr{F}[\mathrm{d}F]$的部分和$S_n(\mathrm{d}F,\ x)$ $S_n(\mathrm{d}F,\ x)$ 有$N_1(S_n(\mathrm{d}F,\ x))<A\|F\|_{\mathrm{V}[0,\ 2\pi]}$（一致地对$n$）。（ii）$F(t)\in \mathrm{BV}(-\infty,\ \infty)$，$N_1(S_\lambda(\mathrm{d}F,\ x))<\mathrm{A}\|F\|_{\mathrm{V}(-\infty,\ \infty)}$（一致地对入）。

特别地当$F(t)$绝对连续，就回到定理1，2的一致弱（1，1）型结论。

最后，我们考虑一下共轭变换$f\to\tilde{f}$的非（1，1）有界性问题。熟知存在$f^*\in \mathrm{L}^1_{2\pi}$，而$\widetilde{f^*}\notin \mathrm{L}^1_{2\pi}$.现在提出这样问题：当限制在线性子集$\mathrm{D}_1=\{f\in \mathrm{L}^1_{2\pi}\ |\tilde{f}\in \mathrm{L}^1_{2\pi}\}$上而论之，能否成为（1，1）型呢？先要指出$\mathrm{D}_1$是$\mathrm{L}^1_{2\pi}$中的稠密集。这是因为熟知的：当$f\in \mathrm{L}^2_{2\pi}$时$\tilde{f}\in \mathrm{L}^2_{2\pi}$，而$\mathrm{L}^2_{2\pi}\subset \mathrm{L}^1_{2\pi}$，所以$\mathrm{L}^2_{2\pi}\subset \mathrm{D}_1\subset \mathrm{L}^1_{2\pi}$。而$\mathrm{L}^2_{2\pi}$在$\mathrm{L}^1_{2\pi}$中稠密。所以$\mathrm{D}_1$在$\mathrm{L}^1_{2\pi}$中稠密。今可证明

定理 5 不存在绝对常数A，使$\|\tilde{f}\|_1<A\|f\|_1$对任意$f\in \mathrm{D}_1$成立。

证明 若结论不成立，也就是存在合乎上式的A。选上述反例函数$f^*(x)$，$f^*\in \mathrm{L}^1_{2\pi}$而$\widetilde{f^*}\notin \mathrm{L}^1_{2\pi}$。由于$\mathrm{D}_1$在$\mathrm{L}^1_{2\pi}$中稠密，存在$f_\nu\in \mathrm{D}_1$，$\nu=1,2,\cdots$，$\|f_\nu-f^*\|_1\to 0$（$\nu\to\infty$）。$f_\nu$的共轭函数叫作$\tilde{f}_\nu$，$\tilde{f}_\nu\in \mathrm{L}^1_{2\pi}$，$f_\nu-f_\mu\in \mathrm{D}_1$。由反假设$\|\tilde{f}_\nu-\tilde{f}_\mu\|_1<A\|f_\nu-f_\mu\|_1<A\|f_\nu-f^*\|_1+A\|f^*-f_\mu\|_1\to 0$，当$\nu,\mu\to\infty$。乃由空间$\mathrm{L}^1_{2\pi}$的完备性知存在$g(x)\in \mathrm{L}^1_{2\pi}$，$\|\tilde{f}_\nu-g\|_1\to 0$。.

现在不妨设f^*的富里级数不含常数项（因为添常数项时其共轭函数不变，仍然$\notin \mathrm{L}^1_{2\pi}$），$f_\nu$的富里级数项叫$\frac{a_0^{(\nu)}}{2}$，

$$a_0^{(\nu)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_\nu(t)\mathrm{d}t\to\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^*(t)\mathrm{d}t=0\quad(\nu\to\infty).$$

来证明g与$\widetilde{f^*}$只能差一常数。命$g(x)$的共轭函数为$G(x)$。因为f_ν的共轭函数$\tilde{f}_\nu\in \mathrm{L}^1_{2\pi}$，故此$\tilde{f}_\nu$的共轭函数是$f_\nu-\frac{a_0^{(\nu)}}{2}$。根据共轭变换的弱（1，1）有界性，$N_1(G-f_\nu-\frac{a_0^{(\nu)}}{2})<A\|g-\tilde{f}_\nu\|_1\to 0$（$\nu\to\infty$）。另外，注意准范数性质$N_1(h)\le\|h\|_1$，$N_1(h+h')\le 2N_1(h)+2N_1(h')$，及$N_1(h)=0$必须且只须几乎处处$h(x)=0$（见Bergh-Lofstrom〔8〕）。故

$N_1(f_\nu-f^*)\le\|f_\nu-f^*\|_1\to 0$，

$N_1(G-f^*)\le 2N_1(G-f_\nu)+2N_1(f_\nu-f^*)\le 4N_1(G-f_\nu-\frac{a_0}{2})+4N_1(\frac{a_0^{(\nu)}}{2})+2N_1(f_\nu-f^*)$，

其中$N_1(\frac{a_0^{(\nu)}}{2})\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{a_0^{(\nu)}}{2}\right|\mathrm{d}t=\pi|a_0^{(\nu)}|\to 0$（$\nu\to\infty$），故而上式三项和趋于零。从此，

$N_1(G-f^*)=0$，故$G(x)=f^*(x)$几乎处处。因为$f^*\in \mathrm{L}^1_{2\pi}$，所以$G(x)\in \mathrm{L}^1_{2\pi}$。于是$G(x)$的共轭函数是$\tilde{G}(x)=g(x)-\frac{a_0}{2}$。这里$\frac{a_0}{2}$是$\mathscr{F}(g)$的常数项。故$\widetilde{f^*}(x)=g(x)-\frac{a}{2}$，但$g(x)\in \mathrm{L}^1_{2\pi}$，而$\widetilde{f^*}(x)\notin \mathrm{L}^1_{2\pi}$。发生矛盾，证完。

附带一提，我们还着手研究其他一些变换。此如变换$f\to S_*(x)=\sup_n S_n(f,\ x)$，极大共轭函数$\widetilde{f^*}$等。它具有什么未曾获知的有界性。弱有界性？此外，当$p>2$变换$f\to c_n$（富里系数列），$f\to\hat{f}$（富里变换），类似地限制在合乎$f\in \mathrm{L}^p$ $\{c_n\}\in l^{p'}$，$(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1)$分别地$f\in \mathrm{L}^p$ $\hat{f}\in \mathrm{L}^{p'}$的$f$的集合上，是否都不具备弱$(p,\ p')$有界性呢？予测是如此。将联系到内插空间

理论的运用．这些是我们正在考虑的工作．

参 考 文 献

[1] Zygmund A., Trigonometric Series, 1977.
[2] Loomis L.H., Bull. Amar. Math. Soc., 52(1946), 1082—1086.
[3] Calderon′ A.P.-Zygumnd A., Acta Math., 88(1952), 85—139.
[4] Caldero′n A.P., Stud. Math., 1(1963), 31—34 (Special series).
[5] Calderón A.P., Stud. Math., 24(1964), 113—190.
[6] Calderon A.P., Stud. Math., 26(1966), 273—299.
[7] Butzer P.L.—Nessel R.I, Fourier Analysis and Approximation, 1971.
[8] Bergh J.—Löfström J., Interpolation Spaces, 1976.
[9] 潘文熙、谢慧满，准范数空间及富里分析中某些线性算子的弱有界性，暨南大学理医学报（待发表）．

Weak Boundedness of Fourier Operators and Conjugate Transforms

Pan Wenxi and Xie Huiman

Abstract

Let $S_n(\mathrm{d}F, x)$ be the partial sums of the Fourier-Stieltjes $\mathscr{F}(\mathrm{d}F)$ with $F(x)\in$ BV[0, 2π]. We prove that there exists an absolute constant A such that $N_1(S_n(\mathrm{d}F, x))\leqslant A\|F\|_V$, where $N_1(g)=\sup\limits_{a>0} a\,\mathrm{mes}[x \mid g(x)>a]$. In particular $N_1(S_n(f, x))\leqslant A\|f\|_1$ for $f\in L^1_{2\pi}$ (which is called uniform weak boundedness of operators S_n). The same statement is asserted concerning Fourier-Stieltjes single integrals

$$S_\lambda(\mathrm{d}F, x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\mathrm{d}F(t),$$

Where $F(x)\in$ BV$(-\infty, \infty)$. Those are based on weak boundedness of conjugate transforms

$$f\to\tilde{f}(x)\doteq\frac{-1}{\pi}\mathrm{V.P.}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}F(t)}{2\mathrm{tg}\frac{t-x}{2}} \text{ and } f\to\overline{f}(t)\doteq\frac{-1}{\pi}\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}F(t)}{t-x}$$

(Hilbert-Stieltjes transform). In conclusion, we point out that there exists no absolute constant A such that $\|\tilde{f}\|_1\leqslant A\|f\|_1$ where $f\in D_1\doteq\{f\in L^1_{2\pi} \mid \tilde{f}\in L^1_{2\pi}\}$.