数学研究与评论
第七卷 第二期

关于Rabinowitz-Crandall的一个例子*

黄文灶　　詹汉生
（北京大学）

分支理论中的整体分支定理是Rabinowitz[1],[2]等人建立的，它是解决非线性特征值问题的有力工具．

设X是Banach空间，$F:\mathbf{R}\times X\to X$如下式中定义：

$$F(\lambda,x)=(I-\lambda L)x+N(\lambda,x)=0 \tag{1}$$

这里L是X上的有界线性算子，$N\in C^2(\mathbf{R}\times X,X)$，$N(\lambda,0)=0$，$D_x^{\infty}N(\lambda,0)=0$．

Rabinowitz[1] 定理：假定：

（1）L和N是紧映射；

（2）λ_0是（I，L）的奇数重正规特征值．

如果$K=\{(\lambda,x)|F(\lambda,x)=0，x\neq 0\}$的闭包，$K_0$＝包含（$\lambda_0$，0）的K的最大连通分支，那么下述结论之一必须成立

（i）K_0是$\mathbf{R}\times X$的无界集．（ii）K_0包含$(\lambda,0)\neq(\lambda_0,0)$

当$N(\lambda,x)=0$时，方程（1）是线性情形，(i)自然成立，但在线性情形（ii）是不可能发生的．于是Rabinowitz，Crandall给出在非线性情形下（ii）发生的例子[1]，其例子如下：

$$设X=\mathbf{R}^2,\quad u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\quad \|u\|=(u_1^2+u_2^2)^{1/2},\quad Au=\lambda(u-B(u)u), \tag{2}$$

这里$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$B(u)=\begin{pmatrix}4u_1^2+6u_2^2&-2u_1u_2\\-2u_1u_2&6u_1^2+4u_2^2\end{pmatrix}$

下面我们说明上述例子的不足之处．

在（2）中令$u_1=0$，得到$2u_2=\lambda u_2(1-4u_2^2)$．由此解出（2）的非零解

$u_2^2=\frac{1}{4}(1-\frac{2}{\lambda})$，$\lambda>2$．这时有

$$\lim_{\lambda\to\infty}u_2^2=\frac{1}{4}\lim_{\lambda\to+\infty}(1-\frac{2}{\lambda})=\frac{1}{4},\quad \lim_{\lambda\to2}u_2^2=\lim_{\lambda\to2}\frac{1}{4}(1-\frac{2}{\lambda})=0,$$

故（2）的解曲线为

$$\Gamma_1:\begin{cases}u_1\equiv 0\\ u_2^2=\frac{1}{4}(1-\frac{2}{\lambda}),\quad \lambda>2\end{cases} \tag{3}$$

*1984年11月3日收到．

当 $\lambda\to+\infty$ 时 $u_2^2\to\frac{1}{4}$. 即 Γ_1 是（2）的分支曲线，而且是无界的.

同理在（2）中令 $u_2=0$ 得到

$$u_1=\lambda(u_1-4u_1^3),\quad u_1^2=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right),\quad \lambda>1 .$$

类似地可得到分支曲线

$$\Gamma_2:\begin{cases} u_1^2=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{\lambda}\right),\ \lambda>1 . \\ u_2=0 \end{cases} \tag{4}$$

是无界的而且过点 $\lambda_1=0$，$u_1=0$，$u_2=0$.

总之，Γ_1，Γ_2 是无界的且都是方程（2）的分支曲线，这与文〔1〕中所说情形（i）不可能发生矛盾．只要证明在分支曲线 Γ_1, Γ_2 上无其它分支点，于是情形（ii）是不可能发生的．为此我们计算（2）在 Γ_1, Γ_2 上的Jacobi 矩阵．

$$\frac{D(\lambda(u-B(u)u)-Au)}{Du}\Big|_{\Gamma_1}=\begin{pmatrix}\lambda(1-4u_2^2)-1 & 0\\ 0 & \lambda(1-12u_2^2)-2\end{pmatrix}\Big|_{\Gamma_1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\lambda+4\end{pmatrix}\Big|_{\Gamma_1}$$

是非退化矩阵.

$$\frac{D(\lambda(u-B(u)u)-Au)}{Du}\Big|_{\Gamma_2}=\begin{pmatrix}\lambda-1-12u_1^2 & 0\\ 0 & \lambda-2-4\lambda u_1^2\end{pmatrix}\Big|_{\Gamma_2}=\begin{pmatrix}-2\lambda+2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Big|_{\Gamma_2}$$ 是非退化矩阵.

这样方程（2）的解曲线 Γ_1，Γ_2 上无其它分支点.

文〔1〕中问题发生在由方程

$$\begin{pmatrix}4r^2 & 0\\ 0 & 6r^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta+\frac{\pi}{4}) & \sin(\theta+\frac{\pi}{4})\\ -\sin(\theta+\frac{\pi}{4}) & \cos(\theta+\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\frac{\pi}{4}) & \sin(\theta+\frac{\pi}{4})\\ -\sin(\theta+\frac{\pi}{4}) & \cos(\theta+\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} \tag{5}$$

导出了 $1=4r^2=6r^2$，然后由此导出矛盾．实际上，由（5）不一定能推出矩阵 $\begin{pmatrix}4r^2 & 0\\ 0 & 6r^2\end{pmatrix}$ 是单位矩阵.

现在我们给出例子说明情形（ii）在有限维空间中是可以发生的．

考虑方程

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\lambda\left[\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}-\|u\|^4\begin{pmatrix}-u_1\\ u_1\end{pmatrix}-\|u\|^2\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\right]. \tag{6}$$

（6）式中当 $\lambda=0$ 时有 $u_1=0$，$u_2=0$，所以方程（6）有非零解时 λ 必须大于零．

（6）式两端点乘 $\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$ 得到: $\dfrac{(u_1^2+2u_2^2)}{\lambda}=(u_1^2+u_2^2)-(u_1^2+u_2^2)^2>0$．由此推出 $u_1^2+u_2^2\leq 1$，即 u 是有界的．

设（6）有非零解 (λ_n, u_n)，$u_n=\begin{pmatrix}u_1^n\\ u_2^n\end{pmatrix}$ 并且情形（i）发生．因为 u_n 有界，$\lambda_n>0$，所以可设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$，有界点列 $\{u_n\}$ 必有收敛的子序列，不妨设 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=u_0$．

（6）式两端除以λ_n得

$$\frac{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}u_n}{\lambda_n}=u_n-\|u_n\|^4\begin{pmatrix}-u_2^n\\ u_1^n\end{pmatrix}-\|u_n\|^2u_n. \tag{7}$$

上式当$n\to+\infty$时，便得到u_0应满足方程：

$$u-\|u\|^4\begin{pmatrix}-u_2\\ u_1\end{pmatrix}-\|u\|^2u=0. \tag{8}$$

(8)式两端点乘u得到$u^2-u^4=0$．即有$u^2=1$或$u^2=0$．以$u^2=1$代入（8），得到$\|u\|^4\begin{pmatrix}-u_2\\ u_1\end{pmatrix}=0$．由此推出$u=0$，这与$u^2=1$矛盾．故可设$u_n\to 0$．

因为$u_n=\frac{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}u_n}{\lambda_n}+\|u_n\|^4\begin{pmatrix}-u_2^n\\ u_1^n\end{pmatrix}+\|u_n\|^2u_n$．又由于$u_n\neq 0$，上式两端除以$\|u_n\|$，得到

$$\frac{u_n}{\|u_n\|}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\frac{u_n}{\lambda_n\|u_n\|}+\|u_n\|^3\begin{pmatrix}-u_2^n\\ u_1^n\end{pmatrix}+\|u_n\|u_n.$$

于是有

$$1=\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|\le\left\|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\frac{u_n}{\lambda_n\|u_n\|}\right\|+\left\|\|u_n\|^3\begin{pmatrix}-u_2^n\\ u_1^n\end{pmatrix}\right\|+\|u_n\|^2\to 0,\text{当}n\to+\infty.$$

这是不可能的．

因此当$\lambda_n\to+\infty$时，$u_n\to u_0$是不可能的．即（6）的非零解集不可能是无界的．又（6）的对应线性部分有单的特征值，故Rabinowitz定理（ii）的情形一定发生．

参 考 文 献

〔1〕H.Rabinowitz,Some global results for nonlinear eigenvalue problems,Journal of Functional A Analysis, 7(1971), 487—513.

〔2〕J.K.Hale,周修义．分支理论．复旦大学、南京大学合译．