1987年5月 数学研究与评论
第七卷 第二期

Meyer—König—Zeller算子的L_p饱和类*

周 信 龙
（杭州大学）

$$\widetilde{M}_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{I_k}f(t)dt\,\widetilde{M}_{nk}(x),\quad f\in L_p[0,1]\quad(1\le p<\infty),$$

称为Meyer—König—Zell 算子，其中

$$I_k=\left(\frac{k}{n+k},\ \frac{k+1}{n+k+1}\right),\quad \widetilde{M}_{nk}(x)=(n+1)\binom{n+k+1}{k}x^k(1-x)^n$$

记

$$S_1=\{f:\ f\in L_1[0,1];\ f'\in BV[a,b];\ x(1-x)^2f'(x)=h(x),$$
$$x\in[a,b],\ h\in BV[a,b],\ 0<a<b<1\}.$$

V.Maier, M.W.Müller和J.Swetits[1]证得:

定理A 对于$f\in L_1[0,1]$, $0<a<a_1<b_1<b<1$，那么

i) $\|f-\widetilde{M}_n(f)\|_{L_1[a_1,b_1]}=O(\frac{1}{n})$ 与$f\in S_1$等价.

ii) $\|f-\widetilde{M}_n(f)\|_{L_1[a_1,b_1]}=o(\frac{1}{n})$ 与$f\in\bar{S}_1$等价.

其中$\bar{S}_1=\{f:\ f\in S_1,\ h=\text{const}\}$.

关于整体饱和定理，他们说尚未建立．本文的目的是建立$\{\widetilde{M}_n\}$的整体饱和定理．记

$$M_p=\left\{f:\ f\in L_p[0,1],\ f=\text{const}+\int_{\xi}^{x}\frac{h(t)}{t(1-t)^2}dt,\ \xi\in(0,1)\right\};$$

$$h(0)=h(1)=0,\quad \left.\begin{array}{l}h\in BV[0,1],\ p=1\\ h'\in L_p[0,1],\ p>1\end{array}\right\}.$$

我们将证明

定理 i) $\|\widetilde{M}_n(f)-f\|_{L_p[0,1]}=O(\frac{1}{n})$ 的充要条件是$f\in M_p$.

ii) $\|\widetilde{M}_n(f)-f\|_{L_p[0,1]}=O(\frac{1}{n})$ 的充要条件是$f=\text{const}$.

此定理的证明基于下面的引理．

引理 设$\varphi(x)=\ln\frac{x}{1-x}+\frac{x}{1-x}$，那么$\|\widetilde{M}_n(\varphi)-\varphi\|_{L_1[0,1]}=O(\frac{1}{n})$.

证明 我们有$\int_{I_k}\frac{t}{1-t}dt=\frac{k}{n}\frac{n}{(n+k)(n+k+1)}+O(\frac{1}{(n+k)^2})$

* *1983年4月3日收到.

由$\int_0^1 \widetilde{M}_{nk}(x)\mathrm{d}x=1$，$\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{k}{n}-\frac{x}{1-x}\widetilde{M}_{nk}(x)\frac{n}{(n+k)(n+k+1)}=0$，

即得$\|\widetilde{M}_n(\frac{t}{1-t},\ x)-\frac{x}{1-x}\|_{L_1[0,1]}=O(\frac{1}{n})$.

又不难验证$\|\widetilde{M}_n(\ln\frac{t}{1-t},x)-\ln\frac{x}{1-x}\|_{L_1[0,\frac{1}{n+1}]}=O(\frac{1}{n})$,

$$\|\int_{I_k}(\ln\frac{t}{1-t}-\ln\frac{x}{1-x})\widetilde{M}_{nk}(x)\mathrm{d}t\|_{L_1[1/(n+1),1]}=O(\frac{1}{n}),\ (k=0,1,2).$$

因此，为证实引理只要证明

$$\|\sum_{k=3}^{\infty}\int_{I_k}(\ln\frac{t}{1-t}-\ln\frac{x}{1-x})\mathrm{d}t\widetilde{M}_{nk}(x)\|_{L_1[1/(n+1),1]}=O(\frac{1}{n}).$$

容易算得

$$\int_{I_k}\ln\frac{t}{1-t}\mathrm{d}t=\frac{n}{(n+k)(n+k+1)}\cdot\frac{1}{2}\{\ln\frac{k}{n}+\ln\frac{k+1}{n-1}\}+r_{nk},\ (k=3,4,\cdots).$$

$$r_{nk}=O(\frac{1}{(n+k)^2}+\frac{n}{k^2(n+k)^2}).$$

于是

$$\int_0^1\sum_{k=3}^{\infty}|r_{nk}|\widetilde{M}_{nk}(x)\mathrm{d}x=O(\frac{1}{n}),$$

$$\sum_{k=3}^{\infty}\int_{I_k}(\ln\frac{t}{1-t}-\ln\frac{x}{1-x})\mathrm{d}t\widetilde{M}_{nk}(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}\{\ln\frac{k}{n}+\ln\frac{k+1}{n-1}-$$

$$-2\ln\frac{x}{1-x}\}m_{k,n-1}(x)+r_n(x), \qquad (1)$$

其中$m_{k,n-1}(x)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1-x)^n$, $\|r_n(x)\|_{L_1[1/(n+1),1]}=O(\frac{1}{n})$. 由Taylor公式.

$$\ln\frac{k}{n}+\ln\frac{k+1}{n-1}-2\ln\frac{x}{1-x}-\frac{1-x}{x}(\frac{k}{n}-\frac{x}{1-x})-\frac{n-1}{k+1}(\frac{k+1}{n-1}-\frac{x}{1-x})$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{1-x}{x})^2(\frac{k}{n}-\frac{x}{1-x})^2-\frac{1}{2}(\frac{n-1}{k+1})^2(\frac{k+1}{n-1}-\frac{x}{1-x})^2$$

$$=O\{(\frac{n-1}{k+1})^3|\frac{x}{1-x}-\frac{k+1}{n-1}|^3+(\frac{1-x}{x})^3|\frac{x}{1-x}-\frac{k}{n}|^3$$

$$+(\frac{1-x}{x})^3|\frac{x}{1-x}-\frac{k+1}{n-1}|^3+(\frac{n}{k})^3|\frac{k}{n}-\frac{x}{1-x}|^3\}. \qquad (2)$$

因为[2]

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\frac{x}{1-x}-\frac{k}{n}|^3 m_{k,n-1}(x)=O\Big(n^{-(3/2)}\frac{x^{3/2}}{(1-x)^3}\Big).$$

所以若整数$|N_1|\leq 2$，$|N_2|\leq 2$，则由上式易得

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left|\frac{x}{1-x}-\frac{k+N_1}{n+N_2}\right|^3 m_{k,n-1}(x)=O\left(n^{-(3/2)}\frac{x^{3/2}}{(1-x)^3}+\frac{1}{n^3}\frac{1}{(1-x)^3}\right). \quad (3)$$

类似地

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{n+N_1}{k+N_2}\right)^3\left|\frac{k+N_2}{n+N_1}-\frac{x}{1-x}\right|^3 m_{k,n-1}(x)=O(n^{-(3/2)}x^{-(3/2)}+n^{-3}x^{-3}). \quad (4)$$

(1)—(4) 表明

$$\sum_{k=3}^{\infty}\int_{I_k}\left(\ln\frac{t}{1-t}-\ln\frac{x}{1-x}\right)dt\widetilde{M}_{nk}(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\frac{1-x}{x}\left(\frac{k}{n}-\frac{x}{1-x}\right)+\frac{n-1}{k+1}\left(\frac{k+1}{n-1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{x}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\left(\frac{k}{n}-\frac{x}{1-x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{k+1}\right)^2\left(\frac{k+1}{n-1}-\frac{x}{1-x}\right)^2\right\}m_{k,n-1}(x)$$

$$+R_n(x),\quad \|R_n(x)\|_{L_1[1/(n-1),1]}=O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (5)$$

但

$$\left\|\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\frac{1-x}{x}\left(\frac{k}{n}-\frac{x}{1-x}\right)+\frac{n-1}{k+1}\left(\frac{k+1}{n-1}-\frac{x}{1-x}\right)\right\}m_{k,n-1}(x)\right\|_{L_1[1/(n-1),1]}=O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (6)$$

又从[2] $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-\frac{x}{1-x}\right)^2 m_{k,n-1}(x)=\frac{1}{nx}$，得到

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-x}{x}\left(\frac{k}{n}-\frac{x}{1-x}\right)\right]^2-\left[\frac{n-1}{k+1}\left(\frac{k+1}{n-1}-\frac{x}{1-x}\right)\right]^2\right\}m_{k,n-1}(x)$$

$$=-\frac{2}{xn(n-2)}+I_n(x), \quad (7)$$

其中 $\|I_n(x)\|_{L_1[1/(n+1),1]}=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

综上所述，$\left\|\sum_{k=3}^{\infty}\int_{I_k}\left(\ln\frac{t}{1-t}-\ln\frac{x}{1-x}\right)dt\widetilde{M}_{nk}(x)\right\|_{L_1[1/(n+1),1]}=O\left(\frac{1}{n}\right)$,

从而 $\|\widetilde{M}_n(\varphi)-\varphi\|_{L_1[0,1]}=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

引理证毕.

记 $M_n(F(t),x)=\sum_{k=0}^{\infty}F\left(\frac{k}{n+k}\right)m_{k,n}(x)$，则当 $F\in C^2[0,1]$ 时[2]

$$\lim_{n\to\infty}n(M_n(F)-F)=\frac{1}{2}x(1-x)^2F''(x), \quad (8)$$

并且容易验证

$\int_0^x(\widetilde{M}_n(f)-f)dt=M_{n-1}(F,x)-F(x)$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

对每一 $\psi(x)\in C^2[0,1]$，定义双线性泛函

$A_n(f,\psi)=n\int_0^1(\widetilde{M}_n(f)-f)\psi dx$，$f\in L_p[0,1]$.

那么

$$\inf_{\|f\|_{L_p[0,1]}\le 1} |A_n(f,\psi)| \le M_\psi .$$

事实上,

$$A_n(f,\psi)=n\sum_{k=0}^{n}\int_{I_k} f(t)\ \{\int_0^1 \widetilde{M}_{nk}(x)\psi(x)\mathrm{d}x-\psi(t)\}\mathrm{d}t \qquad (9)$$

由于 $\psi(x)=\psi(t)+(x-t)\psi'(t)+\frac{(x-t)^2}{2}\psi''(\xi_{x,t})$, 我们见到 (9) 右边等于

$$n\sum_{k=0}^{n}\int_{I_k} f(t)\int_0^1((x-t)\psi'(t)+\frac{(x-t)^2}{2}\psi''(\xi_{x,t}))\widetilde{M}_{n,k}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

但

$$\int_0^1 \widetilde{M}_{nk}(x)(x-t)\mathrm{d}x=O(\frac{1}{n}),\ \int_0^1 \widetilde{M}_{nk}(x)(x-t)^2\mathrm{d}x=O(\frac{1}{n}).$$

从而

$$|A_n(f,\psi)|\le \|f\|_{L_p} M_\psi .$$

此外, 类似于引理的证明, 有

$$\|x(1-x)(\widetilde{M}_n(\varphi)-\varphi)\|_C=O(\frac{1}{n}). \qquad (10)$$

现在来证明定理.

若 $f\in M_1$, 则 $f\doteq \mathrm{const}+\int_\xi^x \frac{h(t)}{t(1-t)^2}\mathrm{d}t$, 我们把 $\widetilde{M}_n(f)$ 写成具有正核的奇异积分:

$$\widetilde{M}_n(f)-f=\int_0^1 (f(t)-f(x))H_n(x,t)\mathrm{d}t .$$

$f\in M_1$, 含有

$$|\widetilde{M}_n(f)-f|\le |h(x)||\widetilde{M}_n(\varphi)-\varphi|+|\widetilde{M}_n(\int_t^x(\varphi(u)-\varphi(t))\mathrm{d}h(u),x)| \qquad (11)$$

一方面由引理推出

$$\|\,|h(x)||\widetilde{M}_n(\varphi)-\varphi|\,\|_{L_1[0,1]}=O(\frac{1}{n}).$$

另一方面, 记 $(\varphi(u)-\varphi(t))_+=\varphi(u)-\varphi(t)$, 若 $u\ge t$; $(\varphi(u)-\varphi(t))_+=0$, $u<t$. 则

$$\int_0^1 |\widetilde{M}_n(\int_t^x(\varphi(u)-\varphi(t))\mathrm{d}h(u),\ x)|\mathrm{d}x\le\int_0^1|\mathrm{d}h(u)|\{\int_u^1\mathrm{d}x\int_0^1(\varphi(u)-\varphi(t))_+ M_n(x,t)\mathrm{d}t+\int_0^u\mathrm{d}x\int_0^1(\varphi(t)-\varphi(u))_+M_n(x,t)\mathrm{d}t\}.$$

这样一来, 我们只要证明

$$\int_u^1\mathrm{d}x\int_0^1(\varphi(u)-\varphi(t))_+M_n(x,t)\mathrm{d}t+\int_0^u\mathrm{d}x\int_0^1(\varphi(t)-\varphi(u))_+M_n(x,t)\mathrm{d}t=\int_u^1\widetilde{M}_n((\varphi(u)-\varphi(\cdot))_+,x)\mathrm{d}x+\int_0^u\widetilde{M}_n((\varphi(\cdot)-\varphi(u))_+,x)\mathrm{d}x=O(\frac{1}{n}). \qquad (12)$$

不难看出 $(\varphi(u)-\varphi(t))_+=0$, $t\in[u,1]$, 从而, 作为 t 的函数 $(\varphi(u)-\varphi(t))_+\in L_1[0,1]$. 于是

$$\int_0^1\widetilde{M}_n((\varphi(u)-\varphi(\cdot))_+,x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\varphi(u)-\varphi(x))_+\mathrm{d}x,$$

$$\int_u^1\widetilde{M}_n((\varphi(u)-\varphi(\cdot))_+,x)\mathrm{d}x=\int_0^u(\varphi(u)-\varphi(x))\mathrm{d}x-\int_0^u \widetilde{M}_n((\varphi(u)-\varphi(\cdot))_+,x)\mathrm{d}x.$$

即得

$$\int_u^1\widetilde{M}_n((\varphi(u)-\varphi(\cdot))_+,x)\mathrm{d}x+\int_0^u\widetilde{M}_n((\varphi(\varphi(u)-\varphi(\cdot))_+,x)\mathrm{d}x=\int_0^u\widetilde{M}_n(\varphi(t),x)\mathrm{d}x-\int_0^u\varphi(x)\mathrm{d}x$$

从引理知（12）成立.（10）、（12）表明

$$\|\widetilde{M}_n(f)-f\|_{L[0,1]}=O(\frac{1}{n}).$$

若$f\in M_p(p>1)$. 记$\theta(k,x)=\sup\limits_{\xi}\frac{1}{x-\xi}\int_{\xi}^{x}|h'(u)|du$. 由于$h'\in L_p[0,1]$. 故$\theta(h,x)\in L_p[0,1]$. 同理$\frac{h(x)}{x(1-x)}\in L_p[0,1]$. 因此.（11）右边第一项的$p$幂积分为$O(\frac{1}{n^p})$. 此外.

$$|\widetilde{M}_n(\int_t^x(\varphi(u)-\varphi(t))dh(u),x)|\leq\theta(h,x)\sum_{k=0}^{\infty}\int_{I_k}dt\int_x^t\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^2}(\tau-x)\widetilde{M}_{nk}(x).$$

显然 $\int_{I_0}dt\int_x^t\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^2}(\tau-x)\widetilde{M}_{n0}(x)=O(\frac{1}{n})$.

若$k\geq1$, 则

$$\int_{I_k}dt\int_x^t\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^2}(\tau-x)\widetilde{M}_{nk}(x)\leq\widetilde{M}_{nk}(x)\{\frac{1}{x(1-x)^2}[(\frac{k+1}{n+k+1}-x)^2\frac{n}{(n+k)(n+k+1)}$$

$$+(\frac{k}{n+k}-x)^2\frac{n}{(n+k)(n+k+1)}]+[(\frac{k}{n+k}-x)^2+(\frac{k+1}{n+k+1}-x)^2]\cdot$$

$$[\frac{1}{\frac{k}{n+k}(1-\frac{k}{n+k})^2}+\frac{1}{\frac{k+1}{n+k+1}(1-\frac{k+1}{n+k+1})^2}]\frac{n}{(n+k)(n+k+1)}\}.$$

由此容易验证

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k}dt\int_x^t\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^2}(\tau-x)\widetilde{M}_{nk}(x)=O(\frac{1}{n}).$$

从而

$$\|\widetilde{M}_n(f)-f\|_{L_p[0,1]}=O(\frac{1}{n}).$$

下面证明$\|\widetilde{M}_n(f)-f\|_{L_p[0,1]}=O(\frac{1}{n})$含有$f\in M_p$. 置$F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则$M_{n-1}(F)-F=\int_0^x(\widetilde{M}_n(f)-f)dt$. 由条件知$M_{n-1}(F,0)-F(0)=M_{n-1}(F,1)-F(1)=0$, $n(M_{n-1}(F)-F)\in BV[0,1]$, 若$p=1$; $n(M_{n-1}(F)-F)'\in L_p'[0,1]$, 若$p>1$. 由于

$$|A_n(f,\psi)|\leq\|f\|_{L_p}M_{\psi}.$$

利用泛函的有界性及（8）, 易得

$$\lim_{n\to\infty}A_n(f,\psi)=\int_0^1 f(x)(x(1-x)^2\psi'(x))'dx$$

对每一$f\in L_p[0,1]$成立. 而令f满足$\|\widetilde{M}_n(f)-f\|_{L_p}=O(\frac{1}{n})$ 故由L_p的弱致密性（$p>1$）及Herry选择原理（$p=1$）知存在$H(x)$使得

$$\int_0^1 f(x)(x(1-x)^2\psi'(x))'dx=\int_0^1\psi(x)dH(x).\qquad(13)$$

$H(x)\in BV[0,1](p=1)$, $H'(x)\in L_p[0,1](p>1)$且$H(0)=H(1)=0$. 若$\|\widetilde{M}_n(f)-f\|_{L_p}=O(\frac{1}{n})$, 那么$H(x)=0$, 从而（10）成为

$$\int_0^1 f(x)(x(1-x)^2\psi'(x))'dx=0$$

简单运算并注意到$\psi\in C^2[0,1]$，即得$f(x)=\text{const}$。若$\|\widetilde{M}_n(f)-f\|_{L_p}=O(\frac{1}{n})$，则

$$\int_0^1\left(f(x)-\int_\xi^x\frac{H(t)}{t(1-t)^2}dt\right)(x(1-x)^2\psi'(x))'dx=0$$

从而

$$f(x)=\text{const}+\int_\xi^x\frac{H(t)}{t(1-t)^2}dt\quad \xi\in(0,1).$$

参 考 文 献

[1] V.Maier, M.W.Müller & J.Swetits, The local L_1 saturation class of the methed of integrated Meyer könig and Zeller operatores, J.Appro. T., 32(1981), 27—31.

[2] M.Becker & R.J.Nessel, A globed approximation theorem for Meyer-König and Zeller operatores, Math. Z., 160, 1—3 (1978), 195—206.