1987年5月 数学研究与评论
第七卷 第二期

一类具不变性质的变系数偏微分方程的特解*

李志斌
（兰州大学）

Zofia Szmydt和Bogdan Ziemián在〔1〕中研究了一类关于$s_{pq}=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^p-\sum_{j=1}^{m}y_j{}^q$不变的多项式系数偏微分算子$P(\mathrm{D})$的性质，给出了方程$P(\mathrm{D})u=0$，$P(\mathrm{D})u=\delta$的一类广义函数解的精确表示，其中$p,q$是正偶数，$m,n\geqslant1$，$\delta$为Dirac函数．本文推广Szmydt与Ziemian 的技巧到一般的变系数偏微分算子上去，并求出了一类具幂函数系数的偏微分方程$P(\mathrm{D})u=A\delta$的特解．A为常数．

给出子类具不变性质的算子P，将P的求解问题在为一由$(\mathscr{L}f)\circ s_{pq}=P(f\circ s_{pq}')$所定义的常微分算子$\mathscr{L}$的求解问题，这个思想最早见于Gärding的〔2〕．Szmydt和Ziemian应用超曲面$s_{pq}(x,y)=s_0$上光滑函数间的平均算子K，对Gärding的思想作了透彻的发挥．

在本文中，我们考虑不变形式$s_{pqr}(x,y,z)=F(|x|_p^p+|y|_q^p-|z|_r^r)$，其中$F(t)$为定义在$\mathbf{R}^1$上的严格单调函数，$F^{-1}(s)$光滑，$F^{-1}(s_0)=0$，且当$|s-s_0|<1$时，$|F^{-1}(s)|<1$；$p$，$q$、$r$为非负偶整数，$x\in\mathbf{R}^n$，$y\in\mathbf{R}^m$，$z\in\mathbf{R}^l$，$n>1$，$m>1$，$l>1$，$|x|_p^p=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^p$，$|y|_q^q=\sum_{j=1}^{m}y_j{}^q$，$|z|_r^r=\sum_{k=1}^{l}z_k{}^r$．下面的引理是整个文章的基础，其证明类似〔1〕中引理的证明．

引理 存在唯一的线性运算K：$C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+m+l})\ni\varphi\to K\varphi\in C^\infty(\mathbf{R}^1\setminus\{s_0\})$，$\operatorname{supp}K\varphi$有界，满足

$$\int_{\mathbf{R}^{n+m+l}}f(s_{pqr})\varphi(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z)=\int_{\mathbf{R}^1}f(s)(K\varphi)(s)\mathrm{d}s \qquad (1)$$

$\forall f\in C^0(\mathbf{R}^1)$，$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+m+l})$．

且若令：$a=a_0=\dfrac{n-p}{p}$，$b=b_0=\dfrac{m-q}{q}$，$c=c_0=\dfrac{l-r}{r}$，$a_i=a+\dfrac{i}{p}$，$b_j=b+\dfrac{j}{q}$，$c_k=c+\dfrac{k}{r}$；$\mu_{ijk}=a_i+b_j+c_k+2$，$\mu=\mu_{000}$；

$$\Omega_{ijk}(s)=\begin{cases}C_0(a_i,b_j,c_k)|F^{-1}(s)'|H(s-s_0)(F^{-1}(s))^{\mu_{ijk}} & \text{当}c_k\in\mathcal{N}_0\text{时}\\ \mathrm{B}(a_i+1,b_j+1)|F^{-1}(s)'|[H(s-s_0)C_1(a_i,b_j,c_k)+\\ \quad+C_4(a_i,b_j,c_k)H(s_0-s)](F^{-1}(s))^{\mu_{ijk}} & \text{当}\begin{matrix}c_k\notin\mathcal{N}_0\\ \mu_{ijk}\notin\mathcal{N}_0\end{matrix}\text{时}\\ B(a_i+1,b_j+1)|F^{-1}(s)'|C_2(a_i,b_j,c_k)(F^{-1}(s))^{\mu_{ijk}}\ln|F'(s)|\\ \quad+B(a_i+1,b_j+1)[C_3(a_i,b_j,c_k)H(s-s_0)+\\ \quad+C_5(a_i,b_j,c_k)H(s_0-s)]|F^{-1}(s)'|(F^{-1}(s))^{\mu_{ijk}} & \text{当}\begin{matrix}c_k\notin\mathcal{N}_0\\ \mu_{ijk}\in\mathcal{N}_0\end{matrix}\text{时}\end{cases}$$

* 1983年11月30日收到

$(s\neq s_0)$．其中B为Beta函数，H为Heaviride函数；$C_v(a_i,b_j,c_k)$ $(v=0,1,\cdots,5)$ 为非零常数，具体意义见下文．

则对任意的常数$N\in\mathcal{N}_0$，存在常数$h\in\mathcal{N}_0$，满足$h>(N+1)v-1$，$v=\max(p,q,r)$，使对每个函数$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+m+l})$有：

$$(K\varphi)(s)=\chi(s)\sum_{0\leq i+j+k<h}A_{ijk}(\varphi)\Omega_{ijk}(s)+qh(\varphi;s) \tag{2}$$

$s\in\mathbf{R}^1\setminus\{s_0\}$．其中$qh(\varphi;s)\in C_0^N(\mathbf{R}^1)$；$\chi(s)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$ 为s_0点的截台函数；

$$A_{ijk}(\varphi)=\frac{1}{p\cdot q\cdot r}\sum_{|\alpha|=i}\sum_{|\beta|=j}\sum_{|\gamma|=k}\frac{C_{\alpha\beta}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}(D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma\varphi)(0)\ .$$

$C_{\alpha\beta}$ 为常数．

文章采用的一切记号，都是遵循通常的用法．

§1．考虑一般的变系数偏微分算子$P(D)$:

$$P(D)=\sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\leq M}a_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma\ ,\quad x\in\mathbf{R}^n,\ y\in\mathbf{R}^m,\ z\in\mathbf{R}^l$$

定义 若存在常微分算子$\mathcal{L}$，使对任意的$f\in C^M(\mathbf{R}^1)$ 有

$$P(D)(f\circ s_{pqr})=(\mathcal{L}f)\circ s_{pqr} \tag{3}$$

则说$P(D)$ 关于s_{pqr}是不变的．

容易确定满足（3）的$P(D)$ 有下面两个重要性质：

性质1 设K由引理给出，对任意的$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+m+l})$下式成立

$$(K(P^{tr}\varphi))(s)=(\mathcal{L}^{tr}(K\varphi))(s) \tag{4}$$

即，$\mathcal{L}^{tr}$: $KC_0^\infty(\mathbf{R}^{n+m+l})\to KC_0^\infty(\mathbf{R}^{n+m+l})$．

性质2 对$E\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$，定义$\langle u(x,y,z),\varphi\rangle=\langle E(s),K\varphi\rangle$，若$\langle\mathcal{L}E,K\varphi\rangle=A\varphi(0)$，则$u$满足$P(D)u=A\delta$．即，若$A=0$，则$u$为齐次方程的非零解；若$A\neq0$，则$u/A$为$P(D)$ 的基本解．

以下假设$a_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)$ 为幂函数，我们来讨论满足（3）式以及下式

$$\mathcal{L}(f(hs))=h^\lambda(\mathcal{L}f)(hs)\ ,\qquad\forall f\in C^M(\mathbf{R}^1),\quad\lambda\geq1 \tag{5}$$

的偏微分算子$P(D)$，研究方程$Pu=0$，$Pu=\delta$的可解性．

今特别考虑不变形式$s_{pqr}=(|x|_p^p+|y|_q^q-|z|_r^r)^{1/v}$，$v$为非负奇整数．对这样的$s_{pqr}$，由(3)和（5）可看出$\mathcal{L}^{tr}$必具形式：$\mathcal{L}^{tr}=\sum_{i=\lambda}^{M}A_is^{i-\lambda}\frac{d^i}{ds^i}$，$A_i$为常数．

令$\pi_{ijk}=v(\mu_{ijk}+1)-1$，$\pi=\pi_{000}$．据（2）知：对$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+m+l})$．

$$(K\varphi)(s)=\frac{1}{pqr}B_0\varphi(0)\chi(s)\Omega_{000}(s)+\sum_{\pi<\pi_{ijk}\leq N}\chi(s)A_{ijk}(\varphi)\Omega_{ijk}(s)+qh(\varphi;s) \tag{6}$$

这里$qh(\varphi;s)\in C_0^N$．若以ω_{kh}记超曲面$s_{k,h}$：$\{x_1^h+\cdots+x_k^h=1\}$ 的测度，则$B_0=C_{000}=\int s_{p,n}d\omega_{p,n}\cdot\int s_{q,m}d\omega_{q,m}\cdot\int s_{r,l}d\omega_{r,l}$．且不难写出

$$\Omega_{000}(s)=\begin{cases} \nu C_0(a,b,c)H(s)S^{\pi} & \text{当 } c\in\mathcal{N}_0 \text{ 时.}\\ \nu B(a+1,b+1)[C_1(a,b,c)H(s)+C_4(a,b,c)H(-s)]s^{\pi} & \text{当 } \begin{matrix}c\notin\mathcal{N}_0\\ \mu\notin\mathcal{N}_0\end{matrix} \text{ 时.}\\ \nu^2B(a+1,b+1)c_2(a,b,c)s^{\pi}\ln|s| & \\ \quad +\nu B(a+1,b+1)[c_3(a,b,c)H(s)+c_5(a,b,c)H(-s)]s^{\pi} & \text{当 } \begin{matrix}c\notin\mathcal{N}_0\\ \mu\in\mathcal{N}_0\end{matrix} \text{ 时.}\end{cases}$$

在引理的证明过程中，可算得

$$c_0(a,b,c)=(-1)^{c+1}\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(\mu+1)}, \tag{7}$$

$$c_1(a,b,c)=\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{c}{n}(-1)^n\frac{(1-\varepsilon)^{n-\mu}}{n-\mu}, \tag{8}$$

$$c_2(a,b,c)=(-1)^{\mu}\binom{c}{\mu}, \tag{9}$$

$$c_3(a,b,c)=\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{n\neq\mu}^{\infty}\binom{c}{n}(-1)^n\frac{(1-\varepsilon)^{(n-\mu}}{n-\mu}. \tag{10}$$

$$c_4(a,b,c)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{c}{n}\frac{1}{n-\mu}+\int_1^{\infty}\frac{(1+t)^c}{t^{\mu+1}}\mathrm{d}t, \tag{11}$$

$$c_5(a,b,c)=\sum_{n\neq\mu}^{\infty}\binom{c}{n}\frac{1}{n-\mu}+\int_1^{\infty}\frac{(1+t)^c}{t^{\mu+1}}\mathrm{d}t, \tag{12}$$

据性质 1 知：$\mathscr{L}''(k\varphi)$ 与$k\varphi$有同样形式，故可得

$$\omega(\pi)=\sum_{i=\lambda}^{M}A_i\pi(\pi-1)\cdots(\pi-i+1)=0 \tag{13}$$

就π,μ,c是否为整数，应用（13）分别可以构造出$E\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^1)$ 使〈E，$k\varphi$〉有意义，且使$\mathscr{L}$E 作用在（6）式后两项上为零，而〈$\mathscr{L}$E，$\chi(s)\Omega_{000}(s)$〉= const，这样就有常数 A 使〈$\mathscr{L}$E，$k\varphi$〉= $A\varphi(0)$. 我们可归结为如下三个定理（限于篇幅，略去繁杂核验）.

定理 1 设$P(D)$ 满足（3）及（5），若$\pi\notin\mathcal{N}_0$，设$\rho=\pi-[\pi]$，$\widetilde{m}=[\pi]+1-\lambda$，如下定义广函 $0\neq u$、$\widetilde{u}\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n-m+l})$

当$\widetilde{m}\geqslant1$ 时：

$$\langle u,\varphi\rangle=\int_0^{\infty}\frac{1}{s^{\rho}}\frac{\mathrm{d}^{\widetilde{m}}}{\mathrm{d}s^{\widetilde{m}}}(K\varphi)(s)\mathrm{d}s \tag{14}$$

$$\forall\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^{n-m+l})$$

$$\langle\widetilde{u},\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{|s|}\frac{\mathrm{d}^{\widetilde{m}}}{\mathrm{d}s^{\widetilde{m}}}(K\varphi)(s)\mathrm{d}s \tag{15}$$

当$\widetilde{m}\leqslant0$ 时：

$$\langle u,\varphi\rangle=\int_0^{\infty}s^{\lambda-1-\pi}(K\varphi)(s)\mathrm{d}s \tag{16}$$

$$\forall\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^{n-m+l})$$

$$\langle\widetilde{u},\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{0}|s|^{\lambda-1-\pi}(K\varphi)(s)\mathrm{d}s \tag{17}$$

令

$$c(\pi)=\begin{cases} c_1(\pi)=\sum\limits_{p=1}^{M}\sum\limits_{v=\max(p,\lambda)}^{M}A_v\binom{v}{p}\pi(\pi-1)\cdots(\pi-v+p+1)\sum\limits_{j=0}^{\widetilde{m}}\binom{\widetilde{m}}{j}(\pi+p-\lambda)\cdot\\ \quad\cdot(\pi+p-\lambda-1)\cdots(\pi+p-\lambda-\widetilde{m}+j+1)\cdot(-1)^{p+j}(p+j-1)! \quad (\widetilde{m}\geqslant1) \\ c_2(\pi)=\sum\limits_{p=1}^{M}\sum\limits_{v=\max(p,\lambda)}^{M}A_v\binom{v}{p}\pi(\pi-1)\cdots(\pi-v+p+1)\cdot(-1)^{p}(p-1)! \quad (\widetilde{m}\leqslant0)\end{cases} \tag{18}$$

$$
\tilde{c}(\pi)=\begin{cases}\tilde{c}_1(\pi)=\sum_{p=1}^{M}\sum_{v=\max(p,\lambda)}^{M}(-1)^{p-\lambda}A_v\binom{v}{p}\pi(\pi-1)\cdots(\pi-v+p+1)\sum_{j=0}^{\tilde{m}}\binom{\tilde{m}}{j}(\pi+p-\lambda)\\ \cdot(\pi+p-\lambda-1)\cdots(\pi+p-\lambda-\tilde{m}+j+1)\cdot(-1)^{p+j}(p+j-1)! \qquad (m\geqslant 1) \\ \tilde{c}_2(\pi)=\sum_{p=1}^{M}\sum_{v=\max(p,\lambda)}^{M}(-1)^{p-\lambda}A_v\binom{v}{p}\pi(\pi-1)\cdots(\pi-v+p+1)\cdot(-1)^p(p-1)! \\ \qquad (\tilde{m}\leqslant 0)\end{cases} \tag{19}
$$

1^0．若$c\in \mathcal{N}_0$．则$Pu=A\delta$，$P\tilde{u}=0$，其中$A=\frac{v}{pqr}B_0c_0(a,b,c)c(\pi)$，

2^0．若$c\notin \mathcal{N}_0$，则$Pu=B\delta$，$P\tilde{u}=\tilde{B}\delta$，其中$B=\frac{v}{pqr}B_0B(a+1,b+1)c_1(a,b,c)c(\pi)$；$\tilde{B}=\frac{v}{pqr}B_0B(a+1,b+1)c_4(a,b,c)\tilde{c}(\pi)$．

定理 2 设$P(\mathrm{D})$满足（3）及（5），若$\pi\in\mathcal{N}_0$，且$\mu\in\mathcal{N}_0$．设$\tilde{m}=\pi+1-\lambda$．如下定义广函$0\neq u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{n+m+l})$，对$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+m+l})$

当$\tilde{m}\geqslant 1$时：
$$\langle u,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}s^{-\tilde{m}}(K\varphi-W_{m-1,K\varphi})\mathrm{d}s, \tag{20}$$

当$m\leqslant 0$时：
$$\langle u,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}s^{-m}(K\varphi)(s)\mathrm{d}s \tag{21}$$

$W_{k,\varphi}$记φ于零点的Taylor展式的前k项．

1^0．若$c\in\mathcal{N}_0$．则$Pu=A\delta$，其中$A=\frac{v}{pqr}B_0c_0(a,b,c)c_2(\pi)$．

2^0．若$c\notin\mathcal{N}_0$，则$Pu=B\delta$，其中$B=\frac{v}{pqr}B_0B(a+1,b+1)[c_3(a,b,c)c_2(\pi)+c_5(a,b,c)\tilde{c}_2(\pi)]$

$c_2(\pi)$，$\tilde{c}_2(\pi)$见（18）、（19）定义．

定理 3 设$P(\mathrm{D})$满足（3）及（5）．若$\pi\in\mathcal{N}_0$，但$\mu\notin\mathcal{N}_0$，设$\tilde{m}=\pi+1-\lambda$．如同（20）、（21）定义广函$0\neq u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{n+m+l})$．

1^0．若$c\in\mathcal{N}_0$，则$Pu=A\delta$，其中$A=\frac{v}{pqr}B_0c_0(a,b,c)c_2(\pi)$；

1^0．若$c\notin\mathcal{N}_0$，则$Pu=B\delta$，其中$B=\frac{v}{pqr}B_0B(a+1,b+1)[c_1(a,b,c)c_2(\pi)+c_4(a,b,c)\tilde{c}_2(\pi)]$．$c_2(\pi)$，$\tilde{c}_2(\pi)$见（18）、（19）定义．定理中$c_v(a,b,c)$（$v=0,1,\cdots,5$）由（7）～（12）定义．

§2 例子及说明

设$\square_{n,m,l}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}-\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2}{\partial z_k^2}$ $(n,m,l\geqslant 1)$．考虑算子，$P(\mathrm{D})=(x^2+y^2-z^2)^{v/3}\square_{n,m,l}^{\eta}$，$\left(\frac{v}{2}\geqslant\eta\geqslant\frac{1+v}{3}\right)$．易知$P(\mathrm{D})$关于$s_{222}=(x^2+y^2-z^2)^{1/3}$不变，而满足（3）及（5）的$\mathcal{L}$为：

$$\mathscr{L}=s^{v}\Big[\frac{4}{9}s^{-1}\frac{d^2}{ds^2}+\frac{6(n+m+l)-8}{9}s^{-2}\frac{d}{ds}\Big]^{\eta},\qquad \lambda=3\eta-v\ .$$

据定理不难写出下列结果：

（ⅰ）$n+m+l$是奇数，对$\forall\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^{n+m+l})$，令：$\left(D^k=\frac{d^k}{ds^k}\right)$

$$\langle u,\varphi\rangle=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{s}}D^{\frac{3}{2}(n+m+l-1)-3\eta+v}(K\varphi)(s)ds,$$

$$\langle\widetilde{u},\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{|s|}}D^{\frac{3}{2}(n+m+l-1)-3\eta+v}(K\varphi)(s)ds,\qquad 当\frac{3}{2}(n+m+l-1)\geqslant 3\eta-v时；$$

$$\langle u,\varphi\rangle=\int_0^{\infty}s^{3\eta-v-2-\frac{3}{2}(n+m+l)}(K\varphi)(s)ds,$$

$$\langle\widetilde{u},\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{0}|s|^{3\eta-v-2-\frac{3}{2}(n+m+l)}(K\varphi)(s)ds,\qquad 当\frac{3(n+m+l)-1}{2}\leqslant 3\eta-v时.$$

则若 l 为偶数，有：　$P(D)u=A\delta,\ P\widetilde{u}=0$，

其中　$$A=\frac{3}{8}n\cdot m\cdot l\omega_n\cdot\omega_m\cdot\omega_l(-1)^{\frac{l}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)}{\Gamma[(n+m+l)/2]}c\left(\frac{3(n+m+l)-2}{2}\right).$$

若 l 为奇数，有：　$P(D)u=B\delta,\ P(D)\widetilde{u}=\widetilde{B}\delta$，

其中　$$B=\frac{3}{8}n\cdot m\cdot l\omega_n\omega_m\omega_l B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{l}{2}-1}{k}(-1)^k\frac{(1-\varepsilon)^{k-1-(n+m+l)/2}}{k-1-(n+m+l)/2}\cdot c\left(\frac{3(n+m+l)-2}{2}\right),$$

$$\widetilde{B}=\frac{3}{8}n\cdot m\cdot l\omega_n\omega_m\omega_l B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{l}{2}-1}{k}\frac{1}{k-1-(n+m+l)/2}+\int_0^{\infty}\frac{(1+t)^{\frac{l}{2}-1}}{t^{(n+m+l)/2}}dt\Big]\widetilde{c}\left(\frac{3(n+m+l)-2}{2}\right).$$

（ⅱ）$n+m+l$是偶数．对$\forall\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^{n+m+l})$ 令：

$$\langle u,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}s^{3\eta-v-\frac{3}{2}(n+m+l)}\left(K\varphi-W\frac{3(n+m+l)-2}{2}+v-3\eta,K\varphi\right)ds,$$

$$当\frac{3(n+m+l)-2}{2}\geqslant 3\eta-v时,$$

$$\langle u,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}s^{3\eta-v-\frac{3}{2}(n+m+l)}(K\varphi)(s)ds,\qquad 当\frac{3}{2}(n+m+l)\leqslant 3\eta-v时.$$

则若 l 为偶数，有：　$P(D)u=A\delta$，

其中$$A=\frac{3}{8}n\cdot m\cdot l\omega_n\omega_m\cdot\omega_l(-1)^{\frac{l}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)}{\Gamma((n+m+l)/2)}c_2\left(\frac{3(n+m+l)-2}{2}\right);$$

若 l 为奇数有：　$P(D)u=B\delta$，

其中$B=\frac{3}{8}n\cdot m\cdot l\omega_n\omega_m\omega_l B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)\Big[\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum\limits_{k=\frac{n+m+l}{2}+1}\binom{\frac{l}{2}-1}{k}(-1)^k\frac{(1-\varepsilon)^{k-1-(n+m+l)/2}}{k-1-(n+m+l)/2}\cdot$

$$\cdot c_2\left(\frac{3(n+m+l)-2}{2}\right)+\sum_{k=\frac{n+m+l}{2}+1}\binom{\frac{l}{2}-1}{k}\frac{1}{k-1-(n+m+l)/2}\widetilde{c}_2\left(\frac{3(n+m+l)-2}{2}\right)$$

$$-\int_1^{\infty}\frac{(1+t)^{\frac{l}{2}-1}}{t^{(n+m+l)/2}}\,\mathrm{d}t\,\widetilde{c}_2\left(\frac{3(n+m+l)-2}{2}\right)\Big].$$

A、B、$\widetilde{B}$中常数$c(\pi)$、$\widetilde{c}(\pi)$、$c_2(\pi)$、$\widetilde{c}_2(\pi)$ 由（18）、（19）式定义，ω_k为k维单位球体积.

说明 1 本文的引理是对一般的不变形式：$s_{pqr}=F(|x|_p^p+|y|_q^q-|z|_r^r)$ 作出的，由此得到的性质 1 与性质 2 对满足（3）式的一般变系数偏微分算子P是成立的. 求解一般的变系数方程$Pu=0$，$Pu=\delta$的困难在于满足（3）式的常微分算子$\mathscr{L}$具体形式未知，故不易求解方程：$\langle \mathscr{L}E, K\varphi\rangle=A\delta$，对什么样的$\mathscr{L}$可求此方程，有待进一步研究.

说明 2 本文一切结论可推广到更一般的不变形式：$s_{pir}=F\left(\sum\limits_{i=1}|x^{(i)}|_{p_i}^{p_i}-|z|_r^r\right)$，$x^{(i)}\in\mathbf{R}^{n_i}$，$z\in\mathbf{R}^l$，$(n_1,\cdots,n_m,\ l\geqslant 1)$ 上去. 另外，本文结论在某种意义上，包含了〔1〕的结论.

本文是在陈庆益教授的鼓励和支持下完成的.

参 考 文 献

〔1〕 Zofia Szmydt and Bogdan Ziemian, Special Solutions of the Equations $Pu=0$, $Pu=\delta$ for Invariant Linear Differential Operators with Polynomial Coeffieients, J.D.E. Vol39(1981), 226—256.

〔2〕 L.Garding and L. Lions, Nuovo Cimento, Supplemento al 14 (1959), 9—60.

Particular Solutions of a Class of Partial Differential Equations with Variate Coefficients and Invariant Properties

Lie Ziping

Abstract

In this paper, a few properties of general patial differential operator P being invariant with respect to the form $F(|x|_p^p+|y|_q^q-|z|_r^r)$ are studied, where $x\in\mathbf{R}^n$, $y\in\mathbf{R}^m$, $z\in\mathbf{R}^l$, and explicit formulas are given for certain solution of the equation $Pu=A\delta$ with P being a differential operator with power function coefficients which preserves the form $(|x|_p^p+|y|_q^q-|z|_r^r)^{1/r}$ for arbitrary even integers p, q, r, and odd integers r.