# 某些线性积分微分方程*

陈庆益 柳训明
(华中工学院)

本文讨论〔1〕中处理粘弹性杆非线性固有值问题时遇到的一些线性积分微分方程．它们在已有的文献中似不曾系统地被研究过，也缺乏这里的一般性．

## 一、混合Volterra-Fredholm 方程

先考虑〔1〕中引用结果而未作证明的线性积分方程（这里只写一般形形式）：

$$u(x,t)=\int_0^t K(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi,t,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau+f(x,t) \qquad (1.1)$$

或简记为：

$$u=Ku+Gu+f \qquad (1.1)'$$

由于积分上限有变限及常限的联合情况，不妨称它为混合Volterra-Fredholm积分方程．

假定核$K(x,t,\tau)$及$G(x,\xi,t,\tau)$分别在〔0，1〕×〔0，∞〕×〔0，∞）及〔0，1〕×〔0，1〕×〔0，∞）×〔0，∞）上连续且有界，给定的函数$f(t,x)$在〔0，1〕×〔，∞）上也连续且有界．

用通常的迭代法求解，作迭代列$\{u_n(x,t)\}$如下：

$$u_0(x,t)=f(x,t),\ u_{n+1}(x,t)=Ku_n+Gu_n+f,\ n=0,1,2,\cdots$$

每个$u_n(x,t)$是唯一地确定的．考虑相邻两个逼近的差：

$$u_1-u_0=Ku_0+Gu_0,\ u_{n+1}-u_n=K(u_n-u_{n-1})+G(u_n-u_{n-1}),\ n=1,2,\cdots$$

据假定，存在常数$M$，使一致地有：

$$|f|\le M,\quad |K|\le M,\quad |G|\le M$$

于是可得估计式：

$$|u_1-u_0|\le\int_0^t|Ku_0|\,d\tau+\int_0^t\int_0^1|Gu_0|\,d\xi d\tau\le 2M^2t,$$

$$|u_2-u_1|\le\int_0^t|K(u_1-u_0)|\,d\tau+\int_0^t\int_0^1|G(u_1-u_0)|\,d\xi dt\le 2^2M^3\frac{t^2}{2!}$$

一般地，有：

$$|u_{n+1}-u_n|\le 2^{n+1}M^{n+2}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!},\quad n=0,1,2,\cdots \qquad (1.2)$$

依据估式（1.3），知级数$u_0(x,t)+[u_1(x,t)-u_0(x,t)]+[u_2(x,t)-u_1(x,t)]+\cdots$关于$(x,t)\in$〔0，1〕×〔0，）为绝对并一致收敛的．特别地，其部分和序列$u_n=u_0+(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots+(u_n-u_{n-1})$为一致收敛的．仿照通常的讨论，知列$\{u_n\}$的极限给出（1.1）的唯一的有界连续解．

总结上述讨论，得下述结果：

* 1984年10月15日收到．

**定理2.1** 假定（1.2）对 $(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty)$ 一致成立，则积分方程（1.1）有唯一的全局解 $u(x, t)$ 存在，且当 $f$ 及 $K$，$G$ 适当光滑时，这个解也有相应的光滑性.

**注1.1** 假设 $|G| \leq M$ 也可换为 $\int_0^1 |G| d\xi$ 对所有的 $t \in [0, \infty)$ 一致有界. 从上面的论证过程可以看出，这是显然的. 此外，对类似于（1.1）的高重积分方程，也有相应结果成立；且 $v$ 可含参数 $x$. 以下同.

**注1.2** 在〔1〕的第三节及第四节例1中 $K \equiv 0$，$G$ 分别具有下列形式：

$$G = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\int_\tau^t \frac{n^2\pi^2}{b(\eta)} d\eta} \cos n\pi (x - \xi)\right], \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad b \geq b_0 > 0,$$

$$G = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\pi (t-\tau) + c_n \sin n\pi (t-\tau)) \cos n\pi (x - \xi)\right]$$

只要选取 $a_n$, $b_n$, $c_n$ 使 $\Sigma |a_n n^2 \cos n\pi x| < \infty$, $\Sigma |(b_n \cos n\pi t + c_n \sin n\pi t) n^2 \cos n\pi x| < \infty$，条件(1.2)即可满足.

**注1.3** （1.1）中关于 $\xi$ 的积分上限也可换为变限 $x$，于是（1.1）化为单及二重混合Volterra方程：

$$u = \int_0^t K u d\tau + \int_0^t \int_0^x G u d\xi d\tau + f(x, t) \tag{1.3}$$

仿照上面的迭代法证明，知定理2.1对（1.3）在相应的假设下也成立. 这就是〔1〕中第四节例3所用到的结果.

**注1.4** 也可用迭代法讨论方程

$$u = \lambda\left[\int_0^t K u d\tau + \int_0^1 G u d\xi\right] \tag{1.4}$$

及类似方程，这时会存在固有值，而与Fredholm方程更为相近.

## 二、微分积分方程

再把〔1〕中第三节遇到的微分积分方程一般化，而考虑下面的方程：

$$\frac{d^m v(t)}{dt^m} + a v(t) - \int_0^t K(t, \tau) v(\tau) d\tau = f(t) \tag{2.1}$$

或改写为：$v^{(m)} + av = -\int_0^t K(t, \tau) v(\tau) ds + f$ （2.1）′

为了区别于下节导数在积分号内的情形（不妨称为积分微分方程），而称（2.1）为微分积分方程. 对 $K$ 及 $f$ 的假定如同上节，这里为简单起见，设 $a$ 为常系数，且左边不含1至 $(m-1)$ 阶的中间导数. 但下面的讨论完全适合于变系数情形及含中间导数的情形，因为只要变系数适当光滑，相应线性齐次方程的基本解组总归存在.

根据常微分方程方面的讨论（例如见〔2〕，王柔怀，伍卓群编，常微分方程讲义，第三章§6），把（2.1）′右边作为非齐次项，利用非齐次方程的变易参数公式，得：

$$v(t) = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(t) + \int_0^t G(t, \tau)\left[\int_0^\tau K(\tau, s) v(s) ds + f(\tau)\right] d\tau \tag{2.2}$$

其中 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 为齐次方程 $v^{(m)} + av = 0$ 的 $m$ 个基本解组，而

$$G(t, \tau) \equiv \frac{1}{W(\tau)} \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) \psi_i(\tau) \tag{2.3}$$

$W$ 是由 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 组成的Wronski行列式，$\psi_i(\tau)$ 是 $W(\tau)$ 中第 $m$ 行第 $i$ 列元素的代数余子式，

$c_1, \cdots, c_m$为任意常数

在（2.2）交换关于$\tau$及$s$的积分顺序，可把它化为Volterra方程标准形式．

$$v(t)+\int_0^t\left[\int_s^t G(t,\tau)K(\tau,s)\mathrm{d}\tau\right]v(s)\mathrm{d}s+\int_0^t G(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^m c_i\varphi_i(t) \tag{2.4}$$

对选定的基本解组$\varphi_1,\cdots,\varphi_m$及固定的常数$c_1,\cdots,c_m$这个方程有唯一的解．

于是得下述结果．

**定理 2.1** 给定微分积分方程

$$v^{(m)}(t)+a_1(t)v^{(m-1)}(t)+\cdots+a_m(t)v(t)+\int_0^t K(t,\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t) \tag{2.5}$$

当$K$及$f$满足上节条件，且系数$a_1(t),\cdots,a_m(t)$适当光滑，使得由（2.3）定义的核$G(t,\tau)$当$0\leq\tau\leq t<\infty$为连续且有界时，方程（2.5）有解$v(t)$存在，且依赖于$m$个任意常数，它们由任意给定的初值$v(0)$、$\cdots$，$v^{(m-1)}(0)$所唯一确定．当给定的所有函数适当光滑时，解$v$也适当光滑

## 二 积分微分方程

最后考虑几种有关的积分微分方程．从最简的一种开始：

$$v(t,x)+\int_0^t K(t,\tau)\int_0^1 G(x,\xi,t,\tau)\frac{\partial^m v(\xi,\tau)}{\partial\xi^m}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau=f(x,t) \tag{3.1}$$

不妨称这种方程为积分微分方程．〔1〕中第三节及第四节例1都涉及到这种方程的特例．

在（3.1）中把左边第二个积分关于$\xi$分部积分$m$次（要求$G$对$\xi$充分光滑），有：

$$v+\int_0^t K(t,\tau)\Big[G\frac{\partial^{m-1}v}{\partial\xi^{m-1}}\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}-\frac{\partial G}{\partial\xi}\frac{\partial^{m-2}v}{\partial\xi^{m-2}}\Big|_0^1+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{\partial^{m-1}G}{\partial\xi^{m-1}}v\Big|_0^1+$$

$$+(-1)^m\int_0^1\frac{\partial^m G}{\partial\xi^m}v\mathrm{d}\xi\Big]\mathrm{d}\tau=f(x,t) \tag{3.2}$$

若给定边值：

$$\frac{\partial^k v}{\partial\xi^k}\Big|_{\xi=0}=\varphi_k(t),\ \frac{\partial^k v}{\partial\xi^k}\Big|_{\xi=1}=\psi_k(t),\quad k=0,1,\cdots,m-1 \tag{3.3}$$

这时则由于

$$\int_0^t K(t,\tau)\frac{\partial^{m-k-1}G}{\partial\xi^{m-k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial\xi^k}\Big|_0^1\mathrm{d}\tau\qquad(k=0,1,\cdots,m-1)$$

都是已知的，于是（3.2）化为如下形式（容易确定$F=f-\int_0^t K\Big[G\frac{\partial^{m-1}v}{\partial\xi^{m-1}}\Big|_0^1-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{\partial^{m-1}G}{\partial\xi^{m-1}}v\Big|_0^1\Big]$）：

$$v+\int_0^t K(t,\tau)(-1)^m\int_0^1\frac{\partial^m G}{\partial\xi^m}v\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau=F(x,t) \tag{3.2'}$$

而为（1.1）的特例，即（1.1）右边第一项不出现时的情形．这时（3.2′）随之（3.1）是唯一地全局可解的．

当然，（3.3）中的$2m$个边值条件比通常多给了一倍，是不大自然的．在许多具体场合，例如〔1〕中第三节及第四节例1，$v$和$G$常能满足相伴的边值条件，使得

$$\int_0^1 \frac{\partial^m v}{\partial \xi^m} \mathrm{d}\xi = (-1)^m \int_0^1 v \frac{\partial^m G}{\partial \xi^m} \mathrm{d}\xi$$

于是（3.1）化为（1.1）的特例：

$$v + (-1)^m \int_0^t \int_0^1 K(t, \tau) \frac{\partial^m G}{\partial \xi^m} v(\xi, \tau) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau = f(x, t)$$

即（3.2′）当$F \equiv f$时的情形。

**注3.1** 也可以把（3.3）中的$2m$个条件的一半即$m$个看作是给定的，而另一半类似于（2.2）中的任意常数$c_1, \cdots c_m$。这时方程（3.1）的解不是唯一确定的，而与$t$的$m$个任意函数有关。

其次，考虑如下的方程：

$$v(t) + \int_0^t K(t, \tau) \frac{\partial^m v}{\partial \tau^m} \mathrm{d}\tau = f(t) \tag{3.4}$$

当然，也可容许$v$及$f$含参变数$x$。仿照上面，在（3.4）的积分项中作$m$次分部积分（要求$K$充分光滑），得：

$$v + K(t, \tau) \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \tau^{m-1}} \Big|_0^t - \frac{\partial K}{\partial \tau} \frac{\partial^{m-2} v}{\partial \tau^{m-2}} \Big|_0^t + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{\partial^{m-1} K}{\partial \tau^{m-1}} v \Big|_0^t + (-1)^m \int_0^t v \frac{\partial^m K}{\partial \tau^m} \mathrm{d}\tau = f(t). \tag{3.4′}$$

这时只要给定初值：

$$\frac{\partial^k v}{\partial \tau^k}(0) = a_k, \quad k = 0, 1, \cdots, m-1 \tag{3.5}$$

（3.4）′ 即化为如下形式：

$$K(t, \tau) \frac{\partial^{m-1} v(t)}{\partial t^{m-1}} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \tau^{m-1}} v(t) + v(t) + (-1)^m \int_0^t \frac{\partial^m K(t, \tau)}{\partial \tau^m} v(\tau) \mathrm{d}\tau = F(t), \tag{3.6}$$

$$F(t) = f(t) - K(t, 0) \frac{\partial^{m-1} v(0)}{\partial t^{m-1}} + \cdots + (-1)^m \frac{\partial^{m-1} K(t, 0)}{\partial \tau^{m-1}} v(0)$$

若对某个非负整数$k \leq m-1$，有：

$$\frac{\partial^n K}{\partial \tau^n}(t, t) \equiv 0, \quad n = 0, 1, \cdots, k, \quad \frac{\partial^{k+1} K}{\partial \tau^{k-1}}(t, t) \neq 0, \quad t \in [0, \infty),$$

则（3.6）在用 $\frac{\partial^{k+1} K}{\partial \tau^{k+1}}(t, t)$ 相除后，即可化为（2.5）形状的标准形式：

$$\frac{\partial^{m-k-2} v(t)}{\partial \tau^{m-k-2}} + \cdots + a_{m-k}(t) v(t) + (-1)^m \int_0^t \frac{\partial^m k(t, \tau)}{\partial \tau^m} v(\tau) \mathrm{d}\tau = F_1(t)$$

于是可用第二节中的方法求解。

最后考虑方程：

$$\frac{\partial^m v(t)}{\partial t^m} + a_1(t) \frac{\partial^{m-1} v(t)}{\partial t^{m-1}} + \cdots + a_m(t) v(t) + \int_0^t K(t, \tau) \frac{\partial^n v(t)}{\partial \tau^n} \mathrm{d}\tau = f(t) \tag{3.7}$$

及方程：

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t^m} + \cdots + a_m(t) v(t, x) + \int_0^t K(t, \tau) \int_0^1 G(x, \xi, t, \tau) \frac{\partial^n v(\xi, \tau)}{\partial \xi^n} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau = f(x, t) \tag{3.8}$$

对它们分别可用处理方程（3.4）及（3.1）的方法求解，不再赘述。

**注3.2** 在一般情形（3.7）及（3.8）中，当然地可容许积分中的项$\frac{\partial^n v}{\partial \tau^n}$及$\frac{\partial^n v}{\partial \xi^n}$换为一般表示：

$$\frac{\partial^n v}{\partial \tau^n}+b_1(\tau)\frac{\partial^{n-1} v}{\partial \tau^{n-1}}+\cdots+b_n(\tau)v \text{及} \frac{\partial^n v}{\partial \xi^n}+c_1(\xi,\tau)\frac{\partial^{n-1} v}{\partial \xi^{n-1}}+\cdots+c_n(\xi,\tau)v,$$

虽然情况较复杂些，方法却仍是有效的．

## 参 考 文 献

〔1〕柳训明，陈庆益，粘弹性问题的另一解法（待发表）．
〔2〕王柔怀、伍卓群，常微分方程讲义，人数出版社。

# On some Linear integral-differential equations

*Cheng Qingyi* and *Liu Xunming*

**Abstract**

In this paper, some linear integral-differential equations, appearing in dealt problems for viscoelastic rods, (See [1]) are treated system-alically and generally.

These equations are of forms (1.1), (1.3), (1.4), (2.1), (3.1), (3.4), (3.7) and (3.8), some of which are libely not discussed in the literature, the others are not argued so thoroughly as here.