数学研究与评论
第七卷 第二期

Bing的伪弧刻划定理的另证*

刘 立 榆
（江西大学）

在齐一维连续体的近期研究中，借用E.G.Effros（〔1〕，定理2.1.p.39）关于变换群一条定理而得到

引理1（Hagopian） 设M是齐连续体，对任$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，若$x, y\in$ M，$\rho(x,y)<\delta$，则存在M到自身上的ε-同胚，把x送到y.

这条引理已成为强有力的工具，或获得新的推进，或使原有重要结论得到改写，例如可参看〔2〕.

R.H.Bing曾经给出伪弧（pseudo—arc）的三条刻划定理：

（Ⅰ）遗传不可分解，弧形连续体[3]；

（Ⅱ）齐弧形连续体[4]；

（Ⅲ）弧形连续体，且每一点都是端点[5].

Bing在获得（Ⅰ）的基础上，推证（Ⅱ）、（Ⅲ），其中至关紧要的一步可归结为下面的

引理2（Bing） 齐、弧形连续体必有端点.

Bing在〔5〕中提出了"端点"概念，在〔3〕、〔4〕中巧妙地论证了端点的存在．本短文用Hagopian引理简洁给出引理2的证明.

先陈述一些定义：连续体M(continnum）意指非退化、紧、连通度量空间．连续体M称为齐的：若对任两点$x, y\in$ M，均有M到自身上的同胚，送x到y．ε-同胚h：M→M，指对每$x\in$ M，均有$\rho(x, h(x))<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$．连续体M称为弧形：若对任$\varepsilon>0$，均有ε-链复盖M．所谓链D，指有限个非空开集列D＝$\{L_1,\cdots,L_m\}$，满足$L_i\cap L_j\neq\phi$当且仅当$|i-j|\leq 1$，$(1\leq i,j\leq m)$．又若对每i，$(1\leq i\leq m)$，均有diam $L_i<\varepsilon$，则称D为ε-链．L_i称为链D的节，特别L_1叫做第一节．连续体M称为不可分解：若M不可表为两个真子连续体的并．M叫做遗传不可分解：若M的每子连续体均不可分解．在本文中，我们定义伪弧为遗传不可分解、弧形连续体即采取上述Bing的刻划（Ⅰ）作定义．点p称为弧形连续体的端点，若对任$\varepsilon>0$，均存在M的ε-链复盖，使得p在第一节.

引理2的证明 因M弧形， 对自然数n，都有点$x_n\in$ M，属于M的某$\frac{1}{n}$-链复盖$D_n=\{L_1^n, L_2^n, \cdots L_{k_n}^n\}$的第一节$L_1^n$．可设$\lim x_n=x_0\in$ M，我们断言：x_0为M的端点.

断言的证明：对任$\varepsilon>0$可对$\frac{1}{3}\varepsilon$用引理1，存在$\delta>0$，取$n_0>\frac{3}{\varepsilon}$，合于$\rho(x_0, x_{n_0})<\delta$，则有满足引理1的$\frac{\varepsilon}{3}$—自同胚$h$，使得$h(x_{n_0})=x_0$．易见$\varepsilon$—链复盖

$$h(L_1^{n_0}),\ h(L_2^{n_0}),\cdots,\ h(L_{k_{n_0}}^{n_0})$$

* 1985年10月19日收到.

合于条件$x_0 \in h(L_1^{n_0})$．断言成立．

在开展证明前，我们指出一个要用到的事实，即伪弧是齐性的．

（Ⅰ）⇒（Ⅱ）的证明．设M为齐弧形连续体．只要证M遗传不可分解．若有子连续体M_1可表为两个真子连续体H_1与H_2的并，取$p \in H_1 \cap H_2$．由M的齐性以及引理2，M的每一点均为端点，p亦为端点．故存在M的一串$\frac{1}{n}$—链复盖$D_n=\{L_1^n, L_2^n, \cdots, L_{k_n}^n\}$，使得$p \in L_1^n$（$n=1,2,3,\cdots$）．因$H_i$连通，故有子链

$$L_1^n, L_2^n, \cdots, L_{j_{n,i}}^n, \quad j_{n,i} \leq k_n, \quad n=1,2,3,\cdots, i=1,2,$$

复盖H_i，且每一节均与H_i相交．不失一般性，可设$j_{n,1} \leq j_{n,2}$或$j_{n,2} \leq j_{n,1}$对一切的n成立．故得$H_1 \subset H_2$，或$H_2 \subset H_1$至少有一成立．这与H_1，H_2均为M_1的真子连续体相矛盾．M_1不可分解，进而M遗传不可分解．得证．

（Ⅰ）⇒（Ⅲ）的证明，已含在（Ⅰ）⇒（Ⅱ）的证明中．

参 考 文 献

〔1〕E.G.Effros, Transformation groups and C—algebras, Ann.of Math., 2(1965), 38—55.

〔2〕J.T.Rogers, Jr., Decompositions of homogeneous continua, Pacific J.Math., 1(1982), 137—144.

〔3〕R.H.Bing, Concerning heredifarily indecomposable continua, Pacific J.Math., 1(1951), 43—51.

〔4〕R.H.Bing, Each homogeneous nondegenerate chainable continuum is a pseudo-arc, Proc.Amer. Math.Soc., 10(1959), 345—346.

〔5〕R.H.Bing, Snake-like continua, Dube Math.J. 18(1951), 653—663.

（接320页）

因此（1）和（2）成立．

在$2 \mid n$时，取$q=2^{2n}+3$，则$q \equiv 4 \pmod 5$，而且

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{2^{2n}+3}{2^{2n+1}+1}\right)=\left(\frac{-5}{2^{2n}+3}\right)=-\left(\frac{2^{2n}+3}{5}\right)=-\left(\frac{4}{5}\right)=-1,$$

和

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{\left|\frac{2^{2n}-6}{5}\right.}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|4},$$

因此仍有（1）和（2）成立．证完．

由引理1、2合起来即得定理．

最后，作者衷心感谢孙琦先生的帮助，他对本文仔细地进行了审阅，谨致谢忱！

参 考 文 献

〔1〕Rotkiewicz, A., Applications of Jacobi's symbol to Lehmer's numbers, Aeta Arith., XLII(1983), 163—187.