半素F—环的结构*

周毅强
（湖南师大）

如果环R含有一个有限非零元集X，使得任意非零aR与X之交不空，则称R为F-环．文献〔1〕证明了：无非零幂零元的F-环是有限个除环的直和．

本文的结果是：R是半素F-环，当且仅当R是有限个除环上的全阵环的直和．从而〔1〕的结论就是我们结果的一个推论．

引理1〔1〕 设R是F-环，如果R是半素的，则R含有极小右理想，且极小右理想的个数是有限数．

引理2〔1〕 设R是半素F-环，A_1，A_2、$\cdots A_n$是R的所有极小右理想．令$(0:A_i)=\{x\in R \mid A_i x=0\}$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n}(0:A_i)=0.$$

命题1 设R，A_i，$i=1,2,\cdots,n$，的意义同上．令I_i为A_j，$j=1,2,\cdots,n$，中一切与A_i（作为R一模）同构者之和．则

（i）I_i是R的理想；（ii）I_i是Artin环；（iii）$RA_i\neq 0$，且R的含于RA_i的右理想具有降链条件．

证（i）设$I_i=A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots+A_{i_s}$，$i_1=i$，$A_{i_j}$，$j=1,2,\cdots,s$，是$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$中所有与$A_i$（作为R-模） 同构者．

I_i是R的右理想．$\forall a\in R$，$x\to ax$是A_{i_j}到aA_{i_j}的一个R-模满同态．$\because A_{i_j}$是一个极小右理想，所以$aA_{i_j}=0$，或者该同态是一个同构．若A_{i_j}与aA_{i_j}同构，则aA_{i_j}也是一个极小右理想，$\therefore aA_{i_j}$为某个A_{i_k}，$1\leqslant k\leqslant s$．从而$aA_{i_j}\subseteq I_i$．总之，$\forall a\in R$，$aI_i\subseteq I_i$．

（ii）Artin环的同态像还是Artin环．由〔2〕(p.138，命题4)，欲证I_i是Artin环，只须证每个A_{i_j}是Artin的．

设J是A_{i_j}的非零右理想．令$T=J+JR$，则T是R的右理想，且$0\neq T\subseteq A_{i_j}$，由A_{i_j}的极小性，$A_{i_j}=J+JR$．$A_{i_j}^2=(J+JR)(J+JR)=J^2+J\cdot JR+JRJ+JRJR\subseteq J\subseteq A_{i_j}$．因R是半素环，所以$A_{i_j}^2\neq O$，故$A_{i_j}^2=A_{i_j}$，从而$J=A_{i_j}$．$A_{i_j}$的非零右理想只有本身．$\therefore A_{i_j}$是Artin环．

（iii）R是半素环，$\therefore RA_i$是R的非零理想，$\because I_i$是一个理想，$\therefore RA_i\subseteq I_i$．由于$I_i$是Artin环，那么R的含于$I_i$的右理想具有降链条件，因而R的含于$RA_i$的右理想具降链条件．

命题2 Artin半单环一定是F-环．

证 先设$R=D_s$是Artin单环，D是一个除环．以$(x)_{ij}$表示在(i,j)位置上的元为x，

* 1985年11月23日收到．

且其他位置上的元均是零的 s 阶矩阵.

取 $X_{D_s}=\{(1)_{i1} \mid i=1,2,\cdots,s\}$. $\forall\ 0 \neq (x_{ij}) \in R$, 设 $x_{pq} \neq 0$, 那么 $(x_{ij})(x_{pq}^{-1})'_{qp}(1)_{p1} = (1)_{pp}(1)_{p1}=(1)_{p1} \in X_{D_s}$, 即 $(x_{ij})R \cap X_{D_s} \neq \varnothing$. $\therefore$ R 是 F-环.

现设 $R = D_{n_1}^{(1)} \oplus D_{n_2}^{(2)} \oplus \cdots \oplus D_{n_t}^{(t)}$, 其中 $D^{(i)}$, $i=,2,\cdots,t$, 是除环.

取 $X_R = \bigcup\limits_{i=1} X_{D_{n_i}^{(i)}}$, 是一个有限集. 设 $0 \neq a = a_1+a_2+\cdots+a_t \in R$, 其中 $a_i \in D_{n_i}^{(i)}$. 则 $\exists\, a_i \neq 0$. $a_i D_{n_i}^{(i)} = a D_{n_i}^{(i)} \subseteq aR$.

由上面证明知, $a_i D_{n_i}^{(i)} \cap X_{D_{n_i}^{(i)}} \neq \varnothing$, 故 $aR \cap X_R \neq \varnothing$. $\therefore$ R 是一个 F-环.

定理　R 是一个半素 F-环, 当且仅当 R 是有限个除环上的全阵环的直和.

证　充分性由命题 2 得. 下证必要性.

设 R 是一个半素 F-环, A_i, $i=1,2,\cdots,n$, 如命题 1 中所设. 由引理 2 应有 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(0:A_i)=0$. 现在不妨设 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}(0:A_i)=0$, 而 $\bigcap\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}(0:A_i) \neq 0$, $j=1,2,\cdots,k$. 则 $1 \leqslant k \leqslant n$. 所以 $R = \sum\limits_{i=1}^{k}{}_s \oplus R/(0:A_i)$, ($\sum\limits_{i=1}^{k}{}_s\oplus$ 表亚直和). 我们证明每个 $R/(0:A_i)$ 是除环上的全阵环. 因为 A_i 是极小右理想, 且 $A_i^2 \neq 0$. 可设 $A_i = e_i R$, $0 \neq e_i = e_i^2$.

设 $A/(0:A_i)$ 是 $R/(0:A_i)$ 的任一非零理想, 则 $\exists\, a \in A$, $A_i a = e_i R a \neq 0$. $\therefore \exists\, r \in R$, $e_i r a \neq 0$. R 是半素环, $0 \neq e_i r a R \subseteq e_i R$, 故 $e_i r a R = e_i R$. 因而 $\exists\, s \in R$, $e_i r a s = e_i$. 而 $\overline{0} \neq \overline{e_i} \in \overline{A}$, 从而 $\overline{0} \neq \overline{R}\,\overline{e_i}\,\overline{R} = \overline{R e_i R} \subseteq \overline{A}$. 故 $R/(0:A_i)$ 是亚直既约环, 且 $H(R/(0:A_i)) = (Re_iR+(0:A_i))/(0:A_i) = (RA_i+(0:A_i))/(0:A_i)$.

现设
$$B_1/(0:A_i) \supseteq B_2/(0:A_i) \supseteq \cdots \supseteq B_m/(0:A_i) \supseteq \cdots \tag{1}$$
是 $\overline{R}$ 的一个右理想链, B_i 是 R 的右理想, 且 $H(R/(0:A_i)) \supseteq B_j/(0:A_i)$, $j=1,2,\cdots$. 由于 $(0:A_i) \subseteq B_j$, 故 $B_j/(0:A_i) = (B_j \cap (RA_i+(0:A_i)))/(0:A_i) = ((B_j \cap RA_i)+(0:A_i))/(0:A_i)$. 由(1)得

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_m \supseteq \cdots,$$
$$B_1 \cap RA_i \supseteq B_2 \cap RA_i \supseteq \cdots \supseteq B_m \cap RA_i \supseteq \cdots.$$

由命题 1, (iii), $\exists\, m \in Z^+$, $B_m \cap RA_i = B_{m+1} \cap RA_i = \cdots\cdots$. 从而 $B_m/(0:A_i) = B_{m+1}/(0:A_i) = \cdots\cdots$. 这就证明了 $\overline{R}$ 的含于 $H(R/(0:A_i))$ 的右理想具有降链条件. 而显然 $H(R/(0:A_i))^2 \neq \overline{0}$. 由〔3(定理 1)〕, $R/(0:A_i)$ 与某个除环上的全阵环同构. 仿〔4(定理 9)〕的证明, 知
$$R = \sum_{i=1}^{k} \oplus R/(0:A_i).$$

推论 1[1]　无非零幂零元的 F-环是有限个除环的直和.

推论 2　可换的半素 F-环是有限个域的直和.

参　考　文　献

〔1〕姚学, 关于 F-环, 数学研究与评论, Vol.4, No 4(1984), pp.77—78.

〔2〕刘绍学, 环与代数, 科学出版社, 1983.

〔3〕郭元春, 亚直不可约环为体的条件, 吉林大学学报, (3), pp. 7—9(1983).

〔4〕Bailey Brown and Neal H. Mcloy, Amer. J. Math 69(1947), pp. 46—58.