关于一类算子的BMO有界性*

钱 涛

（中国科学院系统科学研究所）

王斯雷教授证明[1]：如果$f\in BMO(R^n)$，$g(f)$ 是f的Littlewood-Paley g-函数，则或者$g(f)(x)=\infty$，a.e.，或者$g(f)(x)<\infty$，a.e.，在后者，$g(f)\in BMO(R^n)$ 且存在仅依赖于空间维数的常数C，使

$$\|g(f)\|_*\leqslant C\|f\|_* .$$

本文对包括Littlewood-Paley g-函数及S-函数在内的一类算子证明了同样结果．所给出的证明遵循同样的思想但被较大地简化．

设向量值可测函数$\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)$ 满足下述条件：

（i）$\forall k$，$\int_{R^n}\varphi_k(x)=0$．

（ii）$\exists C_\varphi$，$\forall k$，$\forall x$

$$|\varphi_k(x)|\leqslant\frac{C_\varphi}{1+|x|^{n+1}},\quad |\nabla\varphi_k(x)|\leqslant\frac{C_\varphi}{1+|x|^{n+2}}.$$

记$G(f)(x)=\int_0^\infty|\varphi_t*f(x)|^2\frac{dt}{t}$，其中$\varphi_t=((\varphi_1)_t,\cdots,(\varphi_N)_t)$，$(\varphi_k)_t(x)=\frac{1}{t^n}\varphi_k(\frac{x}{t})$，$\varphi_t*f=((\varphi_1)_t*f,\cdots,(\varphi_N)_t*f)$．

例 1 置$N=n$，$\varphi_k(x)=C_n\frac{x_k}{(1+|x|^2)^{(n+2)/2}}$ 其中常数C_n被选择得使对一切$f\in L^2(R^n)$，

$$\varphi_t*f(x)=t(\nabla_x u)(x,t),$$

其中$u(x,t)$ 是f的Poisson积分，∇_x是对变量x的梯度．显然φ满足上述条件（i），(ii)，且

$$G(f)(x)=[\int_0^\infty|\nabla_x u(x,t)|^2t\,dt]^{1/2}=g_1(f)(x).$$

例 2 置$N=1$，$\varphi_0(x)=C_n'\frac{|x|^2-n}{(1+|x|^2)^{\frac{n+3}{2}}}$，其中常数$C_n'$选择得使对一切$f\in L^2(R^n)$，

$$(\varphi_0)_t*f(x)=t\left(\frac{\partial}{\partial t}u\right)(x,t),$$

其中$u(x,t)$ 仍记f的Poisson积分．由于$(\varphi_0)_t(x)=t\left(\frac{\partial}{\partial t}P_t\right)(x)$，其中$P(x)=\frac{C_n}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$是Poisson核，显见上述条件（i），（ii）满足，且

$$G(f)(x)=\left(\int_0^\infty\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}u\right)(x,t)\right|^2t\,dt\right)^{1/2}=g_2(f)(x).$$

* 1985年10月29日收到．

例3 如保持φ_k, $1\leqslant k\leqslant n$，及φ_0的意义同前二例，置$\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n,\varphi_0)$，则对应的$G(f)$即为Littlewood-Paley g-函数.

与算子G同时，我们也考虑下述所定义的算子G'：对固定的$R>0$，$\varphi_{(v)}(x)=\varphi(x-v)$对$|v|<R$一致地满足条件（i），(ii)，我们可以定义算子$G'$：

$$G'(f)(x)=\left(\int_0^\infty\int_{B(O,R)}|(\varphi_{(v)})_t*f(*)|^2\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}v}{t}\right)^{1/2}.$$

其中$B(O,R)$记中心在原点，半径为R的球.

例4 取φ的意义同于例3，则$G'(f)(x)=S(f)(x)$，其中$S(f)$记f的Littlewood-Paley S-函数.

事实上，
$$G'(f)(x)=\left(\int_0^\infty\int_{B(O,R)}|(\varphi_{(v)})_t*f(x)|^2\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}v}{t}\right)^{1/2}$$
$$=\left(\int_0^\infty\int_{B(O,R)}|\nabla u(x-vt,t)|^2t\mathrm{d}v\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$
$$=\left(\iint_{x+\Gamma}|\nabla u(y,t)|^2t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

其中$\Gamma=\{(y,t)\in R_+^{n+1}:|y|\leqslant Rt\}$.

本文要引用的基本事实是（参见，例如,[2]，Ch.3)：

定理0 设可测向量值函数φ：$R^n\to C^N$满足条件（i），(ii)，则由φ所形成的算子G及G'是$L^2(R^n)$到自身内的有界算子.

本文证明下述的定理：

定理1 设$f\in BMO(R^n)$，则或者$G(f)(x)=\infty$ a.e.，或者$G(f)(x)<\infty$ a.e.，在后一一情形$G(f)\in BMO(R^n)$且存在常数$C=C(n,C_\varphi)$，使得$\|G(f)\|_*\leqslant C\|f\|_*$，其中$\|\cdot\|$记$BMO(R^n)$模.

对于算子G'存在同样结论，只是对应的常数$C'=C'(n,C_\varphi,R)$.

证明 下分为若干步.

(1) 若$G(f)(x)$在一个正测度集上为有限值，则必然$G(f)(x)$ a.e.有限.

事实上，如方体Q（总假定其也平行于座标轴）中含有一个正测度集，在其上$G(f)(x)$取有限值，我们只须证明在Q上$G(f)(x)$ a.e. 有限即可. 记$Q^*=4Q$并作分解：

$$f=f_{Q^*}+(f-f_{Q^*})\chi_{Q^*}+(f-f_{Q^*})\bar{\chi}_Q=\sum_{i=1}^3 f_i, \tag{1}$$

其中对任意有界可测集E，记$f_E=\frac{1}{|E|}\int_E f(x)\mathrm{d}y$，$\chi_E$记集合E的特征函数，$\bar{\chi}_E=1-\chi_E$.

由于φ满足条件（i），φ_t与任意常数之卷积为零，故$G(f_1)\equiv0$. 由于$G(f)(x)$可以看成是Banach空间$L^2\left(R_+,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)$上的模，故由三角形不等式，对任意$x$

$$G(f_3)(x)\leqslant G(f_2)(x)+G(f)(x).$$

由于$f_2\in L^2(R^n)$，由定理0，$G(f_2)(x)$ a.e. 有限，又由于Q中含有一个使$G(f)(x)$取有限值之正测度集，故存在一点$x_0\in Q$，使$G(f_3)(x_0)<\infty$. 我们只须证$G(f_3)(x)$在Q中

a.e. 有限.

事实上，又由三角形不等式及性质（i），对x Q

$$|G(f_3)(x)-G(f_3)(x_0)|\leqslant\left(\int_0^\infty|(\varphi_t*f_3)(x)-(\varphi_t*f_3)(x_0)|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

$$=\left(\int_0^\infty\left|\int_{R^n/Q^*}(\varphi_t(x-y)-\varphi_t(x_0-y))(f(y)-f_{Q^*})dy\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\int_0^\delta\left|\int_{R^n/Q^*}(\varphi_t(x-y)-\varphi_t(x_0-y))(f(y)-f_{Q^*})dy\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int_\delta^\infty\left|\int_{R^n/Q^*}(\varphi_t(x-y)-\varphi_t(x_0-y))(f(y)-f_{Q^*})dy\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}=I_1(x)+I_2(x),$$

其中$\delta=\operatorname{diam}Q^*$.

由$|x-y|\sim|x_0-y|$，φ所满足的性质（ii）中之第一个不等式以及BMO函数的熟知的性质，我们有

$$I_1^2(x)\leqslant C\int_0^\delta t\left[\int_{R^n/Q^*}\frac{|f(y)-f_{Q^*}|}{t^{n+1}+|x_0-y|^{n+1}}dy\right]^2dt$$

$$\leqslant C\int_0^\delta t\left(\int_{R^n}\frac{|f(y)-f_{Q^*}|}{\delta^{n+1}+|x_0-y|^{n+1}}dy\right)^2dt$$

$$\leqslant C\int_0^\delta t\frac{\|f\|_*^2}{\delta^2}dt=C\|f\|_*^2.$$

对估计$I_2(x)$，由性质（ii）中的第二个不等式，我们有

$$I_2^2(x)\leqslant C\int_\delta^\infty t\left(\int_{R^n/Q^*}\frac{\delta|f(y)-f_{Q^*}|}{t^{n+2}+|x_0-y|^{n+2}}dy\right)^2dt$$

$$\leqslant C\int_\delta^\infty t\left(\int_{R^n/Q^*}\frac{\delta|f(y)-f_{Q^*}|}{(\delta^{n+\frac{1}{2}}+|x_0-y|^{n+\frac{1}{2}})t^{3/2}}dy\right)^2dt$$

$$\leqslant C\int_\delta^\infty\delta^2t^{-2}\left(\int_{R^n}\frac{|f(y)-f_{Q^*}|}{\delta^{n+1/2}+|x_0-y|^{n+1/2}}dy\right)^2dt$$

仍由BMO函数的性质，有$I_2^2(x)\leqslant C\int_\delta^\infty\delta t^{-2}\|f\|_*^2dt\leqslant C\|f\|_*^2$.

综上，$G(f_3)(x)$ 在Q上不仅有限，而且有界，故$G(f)(x)$ 在Q上是a.e. 有限的.

（2）由（1）已得出结论：$G(f)(x)$ 或a.e. 无穷，或$a.e.$ 有限. 现假定我们在后一种情形，我们即将断言$G(f)$ 此时是BMO有界的.

设Q为任一给定的方体，仍记$Q^*=4Q$，并考虑相应的分解式（1），既然Q中必定存在一点$\bar{x}$使$G(f_3)(\bar{x})<\infty$，由（1）的结论，在Q上处处有

$$|G(f_3)(x)-G(f_3)(\bar{x})|\leqslant C\|f\|_*$$

由等式$G(f)(x)\equiv G(f_2+f_3)(x)$，并应用定理 0,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|G(f)(x)-G(f_3)(\bar{x})|dx$$

$$=\frac{1}{|Q|}\int_Q|G(f_2+f_3)(x)-G(f_3)(x)+G(f_3)(x)-G(f_3)(\bar{x})|dx$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{1}{|Q|}\int_Q |G(f_2+f_3)(x)-G(f_3)(x)|\,dx+\frac{1}{|Q|}\int_Q |G(f_3)(x)-G(f_3)(\bar{x})|\,dx \\
&< \frac{1}{|Q|}\int_Q |G(f_2)(x)|\,dx + C\|f\|_* \leqslant \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |G(f_2)(x)|^2dx\right)^{1/2}+C\|f\|_* \\
&\leqslant \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^2dx\right)^{1/2}+C\|f\|_* < C\|f\|_*,
\end{aligned}
$$

其中我们用到模 $\|f\|_{*,2}=\sup\limits_{\text{方体}Q\subset R^n}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^2dx\right)^{1/2}$ 与模 $\|f\|$ 的等价性.

因而我们有，对每一方体Q，

$$
\inf_{a\in R}\frac{1}{|Q|}\int_Q |G(f)(x)-a|\,dx < C\|f\|_*,
$$

故由BMO模的性质，我们得到

$$
\|G(f)\|_* < C\|f\|_*,
$$

并由考察证明过程可知，常数$C=C(n,\ C_\varphi)$.

（3）对证明算子G'的同样结论可完全同样地进行，只须注意到$\varphi_{(v)}$对$|v|<R$一致地满足条件（ii）并且将所得到的关于$I^2_{v,1}(x)$及$I^2_{v,2}(x)$的不等式在B(O, R)上对v积分即可.

本文在整理过程中受到王斯雷教授的鼓励与帮助，特此致谢.

参 考 文 献

〔1〕Wang Silei（王斯雷）, Some Properties of Littlewood-Paley's g-Function, Scientia Sinica (Series A), Vol. XXVIII, No.3 (1985), 252—262.

〔2〕Jean-Lin Journe, Calderon-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderon, Lecture Notes in Math., 994(1983).