1987年5月

数学研究与评论
第七卷　第二期

论非标准时空连续统模型及其对Zeno悖论分析的应用*

徐利治　　　谢洪欣
（大连工学院）　（大庆石油学院）

一、非标准时空连续统模型〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉

1960年美国数理逻辑学家A.Robinson运用现代数理逻辑方法成功地构造出包含无限小和无限大等非标准数在内的数域*R，并在*R上建立了非标准分析理论．1980年，本文作者之一及其合作者曾引进了一个非康托自然数序列模型$\mathrm{N}=\{\nu\mid\nu<(\omega)\}$，其中包含着$\widetilde{\mathrm{N}}=\{\nu\mid\nu<(\omega)$，$\nu$为无限自然数$\}$，$(\omega)$为$\omega$的银河（Galaxy）．N及$\widetilde{\mathrm{N}}$被解释为生成观点下的无限性总体[1]．这一模型的特点是包含$\widetilde{\mathrm{N}}$这个有限与无限之间即〈n〉与(ω)之间的潜变段或飞跃段．$\widetilde{\mathrm{N}}$中的元素ν是既非有限又非无限的潜变无限大．飞跃段的构作成功，对恩格斯的"无限性是矛盾"的论断即所谓恩格斯悖论可给出一个具体解释．事实上，$\widetilde{\mathrm{N}}$中的元素ν在康托无穷集合论的意义下是不存在的．因为按康托自然数序列理论的逻辑：非有限即无限．所以，既非有限又非无限的ν是矛盾的：既无限又非无限或既非有限又有限．它背离了康托无穷集合论逻辑结构中的矛盾律和排中律．这里的矛盾就是一种"无限性的矛盾"．对此，有两点需要强调指出：

第一，在生成状态下的$\widetilde{\mathrm{N}}$是从有限向实无限发展过程中的过渡性、潜变性阶段，是某种量在生成中的状态——"量态"．它不同于康托意义下的集合．$\widetilde{\mathrm{N}}$中的元素ν也不是康托集合论意义下的元素．ν既非无限大又非有限数，相应地$\frac{1}{\nu}$则既非0又非有限数；$\frac{1}{\nu}$是从有限的$d>0$过渡到实无限小$\frac{1}{\omega}$的中间物，而$\{\frac{1}{\nu}\mid\nu\in\widetilde{\mathrm{N}}\}$就相应于从非0有限到实无限小的过渡段．它也是一种量态．因此，$\widetilde{\mathrm{N}}$还具有从标准模型R到非标准模型*R的过渡性特征．这种特征是运动的过渡与连结特征的反映．因此$\widetilde{\mathrm{N}}$是一种具有动态特征的非标准模型．

第二，从$\widetilde{\mathrm{N}}$的构成方法可知它是*R的一部分．在*R中ν被规定为无限大．按*R的逻辑结构，ν同ω一样是其中具有明确的无限大属性的成员．在这种情况下，$\widetilde{\mathrm{N}}$应看作是按规定完成了的实在无限的集合．原来按康托集合论的逻辑结构是具有悖论性质的$\nu(\in\widetilde{\mathrm{N}})$，现在由于新的公理式的规定成为新的逻辑结构中的合理元素．于是，旧的逻辑结构中的悖论在新的高一层次的逻辑结构中消解了．这是一个值得注意的现象．作为*R的子集$\widetilde{\mathrm{N}}$在生成状态中的过渡性隐没在*R的实在性中，但又保存下来，使得*R能借助$\widetilde{\mathrm{N}}$的过渡性来解决运动的离散性与连续性的矛盾，刻画动点如何从一个时空单子到另一个时空单子的过渡．

综合以上两点，为区别于康托自然数序列及Robinson的模型*R，用记号表示我们的模型为〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉，并称之为非标准时空连续统模型．它提供了对运动时空结构进行逻辑和数学分析的新工具，同时它也能更深刻、更精细地反映运动时空的离散与连续的统一，并可对Zeno悖论作出新的解释和赋予新的意义．

二、〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉的层次性与运动的相对性

为了观察和研究运动的物体，人们常用照相的方法．假设照相机快门启闭的瞬间是$\frac{1}{100}$秒，连续拍下运动物体的照片，那么物体在$\frac{1}{100}$秒瞬间内的运动就被固定（僵化）在一张相片上．大于$\frac{1}{100}$秒的运动情况可以从不同的相片中识别出来，而不大于$\frac{1}{100}$秒的运动情况则无法从相片上识别了．为了更精细地研究

物体的运动，可以设计快门启闭瞬间为$\frac{1}{1000}$秒甚至更短的高速照相机．人们的认识能力是无限的，能够实际设计制造更高速度的照相机来研究更短暂瞬间的运动，也能够用思维构造出更精细的模型来描写运动．

从标准实数域R 到非标准实数域〈*R，$\widetilde{N}$〉，人们的认识从有限进展到了无限小．无限小又可分成无限多个不同的等级．令ω表示由过程量的等价类{〈n〉}定义的非标准无限大自然数[1]，则可定义：1级无限小为$\frac{1}{\omega}$，2级无限小为$\frac{1}{\omega^2}$，…，n级无限小为$\frac{1}{\omega^n}$，…？．

又以$O(\frac{1}{\omega^n})$表示与$\frac{1}{\omega^n}$同级的无限小，例如$\frac{j}{\omega^n}+\frac{k}{\omega^{n+1}}+\frac{l}{\omega^{n+2}}$，其中$n=1,2,\cdots$；系数$j$，$k$，$l$等只限于标准实数．于是我们可将*R分成不同的层次并将单子及标准部分的概念作相应的扩充：

0级层次（即标准实数域）　，　$\mathbf{R}=\{x\}$，

1级层次　$\mathbf{R}^{(1)}=\{x+O(\frac{1}{\omega})\mid x\in\mathbf{R}\}$，

2级层次　$\mathbf{R}^{(2)}=\{x^{(1)}+O(\frac{1}{\omega^2})\mid x^{(1)}\in\mathbf{R}^{(1)}\}$，

一般地，可定义n级层次$\mathbf{R}^{(n)}$，等等．

设$x^{(0)}\in\mathbf{R}$，则$x^{(0)}$的1级相对单子定义为：与$x^{(0)}$相距为1级无限小的一切点的集合：

$$\mu^{(1)}(x^{(0)})=\{x\mid x=x^{(0)}+O(\frac{1}{\omega})\}\subset\mathbf{R}^{(1)},$$

类似地，$x^{(1)}\in\mathbf{R}^{(1)}$，$x^{(1)}$的2级相对单子为：

$$\mu^{(2)}(x^{(1)})=\{x\mid x=x^{(1)}+O(\frac{1}{\omega^2})\}\subset\mathbf{R}^{(2)},$$

一般地，$x^{(n-1)}\in\mathbf{R}^{(n-1)}$，$x^{(n-1)}$的$n$级相对单子为：

$$\mu^{(n)}(x^{(n-1)})=\{x\mid x=x^{(n-1)}+O(\frac{1}{\omega^n})\}\subset\mathbf{R}^{(n)}，\text{等等}.$$

k级标准部分定义为在非标准实数中舍去高于k级无限小而得的广义实数；

1级标准部分：$\mathrm{st}^{(1)}(x+O(\frac{1}{\omega}))=x\in\mathbf{R}$，

2级标准部分：$\mathrm{st}^{(2)}(x^{(1)}+O(\frac{1}{\omega^2}))=x^{(1)}\in\mathbf{R}^{(1)}$，

一般地，n级标准部分：$\mathrm{st}^{(n)}(x^{(n-1)}+O(\frac{1}{\omega^n}))=x^{(n-1)}\in\mathbf{R}^{(n-1)}$．

这样划分时空层次后，我们可对运动作层次相对性的划分．在R中不存在无限小，也不能有无限小的"运动"．所以在R中只能识别到有限的层次．在$\mathbf{R}^{(1)}$中则可识别1级无限小的"运动"．类似地在$\mathbf{R}^{(n)}$中就可识别n级无限小的"运动"．按照这种时空层次模型，"运动"和"不动"具有相对的意义．点在0级层次R上x处的"不动"，在一级层次$\mathbf{R}^{(1)}$上的1级相对单子$\mu^{(1)}(x)$上可能有1级无限小的"运动"．它在0级层次R上x处的"不动"是通过取1级标准部分而得的：$x=\mathrm{st}^{(1)}(x+O(\frac{1}{\omega}))$．类似地，点在R $\mathbf{R}^{(2)}$的$x+\frac{1}{2\omega}$处"不动"，在$\mathbf{R}^{(2)}$的2级相对单子$\mu^{(2)}(x+\frac{1}{2\omega})$上可能有2级无限小的"运动"，而$x+\frac{1}{2\omega}=\mathrm{st}^{(2)}(x+\frac{1}{2\omega}+O(\frac{1}{\omega^2}))$，即舍去2级无限小"运动"的结果．因此，动与静是相对的．时空层次模模型反映的正是运动的层次相对性．

在以上的各级层次$\mathbf{R}^{(n)}$中，我们实际上只考虑了$\mathbf{R}=\mathbf{R}^{(0)}$中的标准实数以及一切如下形式的无限小：

$$f_m(\omega^{-1})=\sum_{j=1}^{m}a_j\omega^{-j}\qquad(m=1,2,\cdots,\ a_j\in\mathbf{R})$$

而且我们有

$$\mathbf{R}^{(0)}=\mathbf{R},\qquad \mathbf{R}^{(1)}=\{x+O(\frac{1}{\omega})\mid x\in\mathbf{R}\},$$

$$\mathrm{R}^{(m)}=\{x+f_{m-1}(\omega^{-1})+O(\frac{1}{\omega^m})\,|\,x\in\mathrm{R}\},\quad m=2,3,\cdots.$$

记$^*\mathrm{R}_m=\bigcup_{m=0}^{\infty}\mathrm{R}^{(m)}\subset{}^*\mathrm{R}$，如果无限大也仅考虑$\widetilde{\mathrm{N}}$中的元素，那么上述层次模型可表示为〈$^*\mathrm{R}_m$，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉.

取这一简化的非标准时空连续统模型，对于可能的应用来说将是足够的和便利的．例如函数$x=f(t)$在$t_0(\in\mathrm{R})$处的连续性在〈$^*\mathrm{R}$，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉可表为：

$$(\forall t\in{}^*\mathrm{R}_m)(t\approx t_0\supset f(t)\approx f(t_0)),$$

其中“≈”的意义是两端相差为形如$f_m(\omega^{-1})$的无限小．在〈$^*\mathrm{R}$，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉中取标准数：$\mathrm{st}(x+\varepsilon)=x$，$x\in\mathrm{R}$，$\varepsilon\in\mu(0)$，是很“强”的“运算”．在〈$^*\mathrm{R}_m$，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉中取各级相对标准部分是较“弱”的“运算”．但能够显示层次的相对性．通过逐级取标准部分可以从非标准数$x+f_m(\omega^{-1})$过渡到标准数x．在此意义上，非标准时空连续统模型〈$^*\mathrm{R}_m$，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉也能比标准模型R更精细地反映运动的连续性．

三、〈$^*\mathrm{R}$，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉在Zeno悖论分析中的应用

模型〈$^*\mathrm{R}$，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉的优点之一是，如上述作了层次区分之后可以反映运动的层次相对性．另一个优点是，某些Zeno悖论可以在〈$^*\mathrm{R}$，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉中消解．这将有助于我们认识和解决运动时空的离散与连续的关系这一自古以来就引起数学家和哲学家普遍重视的问题．

1．模型$^*\mathrm{R}$对运动连续性的刻画与$^*\mathrm{R}$中单子的离散性．

运动的连续性在标准分析中用标准的连续函数$x=f(t)$来描述．在R上，$x=f(t)$在点$t_0\in(a,b)\subseteq\mathrm{R}$处的连续性，其充要条件可表为：

$(\forall\varepsilon\in\mathrm{R}^+)(\exists\delta\in\mathrm{R}^+)(\forall t\in(a,b))(|t-t_0|<\delta\supset|f(t)-f(t_0)|<\varepsilon)$ 其中R^+表正实数，ε是任意小但总总是标准的有限实数．如果扩张到$^*\mathrm{R}$上并借助于无限小，则$x=f(t)$在标准点$t_0\in(a,b)\subseteq{}^*\mathrm{R}$处连续的充要条件可简单地表为：

$$(\forall t\in{}^*\mathrm{R})(t\approx t_0\supset f(t)\approx f(t_0))$$

即$f(t)$把t_0的单子$\mu(t_0)$映射到$f(t_0)$的单子$\mu(f(t_0))$内．直观地说就是在任何无限小的瞬间，位移也是无限小．在$^*\mathrm{R}$内，时空变化可以达到无限小，这使它能比R更精细地反映运动的连续性．

但另一方面，Robinson的非标准分析用$^*\mathrm{R}$的单子来刻画连续性时，把运动过程局限在孤立的时空单子内．按$^*\mathrm{R}$的逻辑结构，单子$\mu(a)$是a在$^*\mathrm{R}$中的等价类即陪集（mod M_1，$M_1=\mu(0)$是$^*\mathrm{R}$中全体无限小组成的一个陪集）．$^*\mathrm{R}$的有限部分$\mathrm{Galaxy}(0)=M$．是这些等价类的集合，其中每个等价类（即单子）是彼此分离而没有公共部分的．在时空单子$\mu(t_0)$和$\mu(f(t_0))$中作无限小位移运动的点，不可能移出单子而被永远幽禁在其中．在$^*\mathrm{R}$中单子的离散性与运动的连续性相对立，使得$^*\mathrm{R}$无法说明动点如何进入一个单子又如何从其中走出来再进入另一个单子．——这是$^*\mathrm{R}$中的一个Zeno型悖论．

$\widetilde{\mathrm{N}}$的过渡性特征恰好能够用来刻画运动的连结与过渡，解决上述$^*\mathrm{R}$中的离散与连续的矛盾．换言之，我们可以用序列过程的飞跃段的左入右出或右入左出（对称性逆转）来实现单子间的过渡．设有标准实数序列：$r_n\to a$（$a\in\mathrm{R}$，$n\in\{n\}$），则按非标准自然数序列模型N的构造方式知由初始片段｛n｝扩张为$\mathrm{N}=\{v\,|\,v<(\omega)\}$时，我们便可相应地获得：$r_v\to a$（$v\in\mathrm{N}$）．于是有$r_v\in\mu(a)$，（$v\in\widetilde{\mathrm{N}}$），即动点借助于$r_v$过渡到单子$\mu(a)$内．特别，若$r_n$与$r'_n$为两个标准有理数序列且$r_n\nearrow a$，$r'_n\searrow a$．则$r_v$与$r'_v$（$v\in\mathrm{N}$）将分别进入$a$的左半单子$\mu^-(a)$和右半单子$\mu^+(a)$：$r_v\in\mu^-(a)$，$r'_v\in\mu^+(a)$，（$v\in\widetilde{\mathrm{N}}$）．这样在R上看$\mathrm{st}(r_v)=\mathrm{st}(r'_v)=a$．即它们分别都达到了标准点$a$．如果把$r_v\nearrow a$看作进入$\mu(a)$的过程而把$r'_v\searrow a$从某个$v$开始逆转过来看作是走出$\mu(a)$进入另一单子的过程，那么我们就借助于$\widetilde{\mathrm{N}}$的过渡性实现了从一个单子向另一个单子的过渡．单子的离散性与运动连续性的矛盾得到了解决．因此，原来$^*\mathrm{R}$中的Zeno悖论在〈$^*\mathrm{R}$，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉中消解了．联系到Zeno的“阿基里斯悖论”和“二分法悖论”，我们知道前者关于前进过程，相当于$r_n\nearrow a$；后者则关于逆退过程，相当于$r'_n\searrow a$．Zono用前者论证r_n永远不能达到a又用后者论证运动不能开始．在$^*\mathrm{R}$中看前者有如

动点永远不能进入$\mu(a)$，后者有如动点永远不能走出$\mu(a)$．现在借助于模型〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉，这两个古老的Zeno悖论的两个相反过程不再表现为运动时空连结与过渡的障碍而成为时空单子连结起来的桥梁．悖论也就不悖了．

2．关于“飞矢不动”悖论．按照〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉的时空层次性，在0级层次R上矢“不动”是因为舍去了1级无限小，“运动”被僵化为“不动”．实际上矢在1级或更高级的层次上可能是运动着的，这可以在1级层次$R^{(1)}$的时空相对单子$\mu^{(1)}(t_0)$、$\mu^{(1)}(x_0)$上反映出来．类似地，在$R^{(1)}$上$t=t_0+\frac{1}{2\omega}$矢在$x=x_0-\frac{3}{\omega}$“不动”，但在$R^{(2)}$的$\mu^{(2)}(t_0+\frac{1}{2\omega})$、$\mu^{(2)}(x_0-\frac{3}{\omega})$上还是“运动”着的．如此等等．动与不动是相对于不同层次而言的．所以，“飞矢不动”悖论也在〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉的层次相对性解释下消解了．

3．关于“抛球悖论”，[1][2]这是Zeno“二分法悖论”的一个现代引伸．设A、B二人玩一球，开始球由A抛给B费时$\frac{1}{2}$分钟，再由B抛给A弗时$\frac{1}{2^2}$分钟，如此往复以至无限．问抛球过程进行到1分钟时，球在谁手中？

在R中考察这个问题，以标准自然数1,2,…，n,…为过程划分的标记，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$（$n=1$，2,…）且不妨以$-1$和1分别标记“球在A手中”和“球在B手中”．按每一时刻球有一确定位置的基本前提，对一切标准自然数k及0，有$f(T_{2k+1})=1$，$f(T_{2k})=-1$，即在各时刻T_{2k+1}及T_{2k}球均有确定位置．但如果在*R上考虑问题，则当$\lim_{n\to\infty}T_n=1$即过程进行到1分钟时，球却没有确定的位置．这与基本前提矛盾．这矛盾潜无限论者是不予承认的．实在无限论者则连表面回避也不可能．〔1〕曾利用非康托自然数序列模型$\mathbf{N}$对“抛球悖论”作出了一个不同的解释．以$\mathbf{N}=\{v\mid v<(\omega)\}$作为过程分划的标记，令$v_k=(2k)$

$v_k=(2k)[\frac{\omega}{2k+1}]$，$\mu_k=(2k)[\frac{\omega}{2k+1}]+1$（$k=1,2,\cdots$），则$\mu_k$、$v_k$分别为无限大奇、偶自然数．按非标准分析的扩张原理[3]，对$2k$，$2k+1$；v_k、$\mu_k\in\mathbf{N}$，有$f(T_\mu)=f(T_{2k+1})=1$，$f(T_v)=f(T_{2k})=-1$．再按非标准分析方法取标准数得$\mathrm{st}(T_v)=\mathrm{st}(T_\mu)=1$，$(k=1,2,\cdots)$．于是在1分钟这一时刻球将在$-1$和$+1$各无限多次．这就以一种明确的方式肯定了悖论的**相对存在性**．

在以上解释中，“抛球悖论”之所以能使运动的矛盾尖锐化，是因为时间已在*R中解释，而空间的两点-1和1仍保持固定的有限距离即空间仍保留在R中解释．如果将时空同时置于非标准模型〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉中，则相对于球在-1与1之间“飞跃”的无限小瞬间（t_μ，t_v），球的运动速度将是$\widetilde{\mathrm{N}}$中的无限大．因此-1与1之间在R中的有限距离在〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉中将是无限小．根据运动的连续性，在无限小瞬间（t_μ，t_v）有无限小位移才是合理的．于是，对应于-1和1的A和B两点属于同一个空间单子而有相同的标准部分．若记此标准部分为C，则$\mathrm{st}(A)=\mathrm{st}(B)=C$．这样一来，在〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉上看，球在时空单子$\mu(1)$和$\mu(C)$中运动，在R上看，球在确定的时刻$1=\mathrm{st}(T_\mu)=\mathrm{st}(T_v)$，对应有一个确定的位置$C=\mathrm{st}(A)=\mathrm{st}(B)$．“抛球悖论”在〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉中也消解了．

上述$C=\mathrm{st}(A)=\mathrm{st}(B)$中的$C$似乎还有点疑问．我们能断定$C=-1$或1，二者必居其一．事实上，它可以用〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉构作中的$\mathscr{U}$一等价意义来证明．

根据$\mathscr{U}$等价定义[3]，过程量

$$\langle x\rangle=\langle -1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots\rangle=\begin{cases}\langle -1\rangle=-1, & \text{当}\ \{n\mid n\text{为奇数}\}\in\mathscr{U},\\ \langle 1\rangle=1, & \text{当}\ \{n\mid n\text{为偶数}\}\in\mathscr{U}.\end{cases}$$

因此，$\langle x\rangle=\langle -1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots\rangle$属于$\mu(-1)$或属于$\mu(1)$即$\mathrm{st}(\langle x\rangle)=-1$或1取决于超滤集$\mathscr{U}$的取法．但这只能以公理式的规定来解决而不能根据〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉的逻辑来判定．相反，〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉的逻辑结构取决于$\mathscr{U}$．$\mathscr{U}$一旦取定，〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉的逻辑结构也就确定了，C即$\mathrm{st}(\langle x\rangle)=-1$或1也就完全确定了．所以对于确定的非标准时空连续统模型〈*R，$\widetilde{\mathrm{N}}$〉，在取标准数的意义下，球在每一确定

的时刻，包括$T=1$!(分钟)，都有一个确定的位置."抛球悖论"消解了．

我们看到，非标准时空连续统模型〈*R，$\widetilde{N}$〉在解决Zeno悖论即解决时空离散与连续的关系问题上，确有独到之处．仔细考察，我们发现〈*R，$\widetilde{N}$〉在解决Zeno悖论时采取了两个关键性的措施．其一是扩张，例如从｛n｝到N的扩张，或更一般地按非标准分析理论，把这种扩张规定为"扩张原理"(Extension principle）或所谓"莱布尼兹原理"(Leibniz principle)[3]．其二是紧缩即"取标准数"这一"运算"．这是〈*R，$\widetilde{N}$〉的逻辑结构中两个非常重要的基本前提——两个公理式的规定．它们是合理地实现微积分基本运算，解决离散与连续关系即Zeno悖论的强有力武器．这些原理的直觉依据是相当明显的，但却不是由形式逻辑提供的．它们的合理性根本不能用形式逻辑来证明．相反，它们的合理性和合法性必须依赖于对古典形式逻辑的超脱．当人们按"非此即彼"的逻辑用数学的函数关系这一类静态的对应关系来描写运动的同时，又总是按"亦此亦彼"、"由此及彼"、"从有限到无限"的逻辑来思维运动．后一种逻辑才是扩张和紧缩以及)"延伸原理"(即潜无限)、"穷竭原理"(即实无限）一类非标准分析逻辑的原理的基础．没有这类非标准分析学原理，离散与连续的矛盾——Zeno悖论也无法解决．本文提出的模型及论点，希望供数学哲学家进一步分析研究．

参 考 文 献

〔1〕徐利治，数学方法论选讲，华中工学院出版社1983年出版．

〔2〕杨熙龄，西方数理哲学上的无限问题,《国外社会科学》，1982，No. 2.

〔3〕H. J. Keisler, Foundation of infinitesimal calculus, 1976.

〔4〕徐利治、朱梧贾等，悖论与数学基础问题（补充二)，数学研究与评论，2(1984)，24.

On the Non-standard Model for the Time and Space with an Application to Resolving Zeno's Paradoxes*

Xu Lizhi（徐利治）　　*Xie Hongxin*（谢洪欣）

The object of this article is to expound our non-standard model 〈*R, $\widetilde{N}$〉 for the time and space, in which *R is the non-standard real continuum and $\widetilde{N}$ the flying segment of N—the so-called non-Cantorian model of natural number sequence whose structure has been formulated previously (cf. Lizhi Xu's book "Selected Topics on the Methodology of Mathematics", Hua-Zhong University of Science & Technology Press, 1983, Chapter 7). As an application of the model, Zeno's paradoxes have been resolved in a very natural way. In fact, the concept of motion and that of motionlessness have only relative meaning with respect to the so-called monads of different orders in the model 〈*R, $\widetilde{N}$〉.