1987年8月

数学研究与评论
第七卷 第三期

常曲率空间关于直交全脐超曲面系的特征性质*

吴 少 华

（杭州大学）

§1．引言 胡和生曾证明了[1]

定理A 如果黎曼空间V_n（$n\geq 4$）容有3系相互直交的常曲率全测地超曲面，则V_n是常曲率空间．

定理B 容有2系相互直交常曲率全测地超曲面的黎曼空间不一定是常曲率的．

黄城超将定理A改进为[2]

定理C 如果黎曼空间V_{n+1}（$n\geq 3$）容有3系相互直交的常曲率全脐超曲面，则V_{n+1}是常曲率的．

白正国证明了常曲率空间的曲率张量特征[3]，从而也导出了上述结果．

沈一兵又将定理C改进为[4]

定理D 如果黎曼流形（M^n，$\overline{g}$）（$n\geq 3$）容有3系相互直交全脐超曲面系，其中一系是常曲率的，另外两系是爱因斯坦的，则（M^n，$\overline{g}$）是常曲率的．

本文目的是从另一方面推广定理A和定理C，即下文的定理1、定理2．并举例说明定理1、定理2的条件的不可削弱性．

如果黎曼空间V_n是共形平坦的，那末，它的曲率张量为

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{1}{n-2}(R_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma}-R_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta}+R_{\beta\gamma}a_{\alpha\delta}-R_{\beta\delta}a_{\alpha\gamma})-\frac{R}{(n-1)(n-2)}(a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma}-a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta}),\quad(1)$$

并且Ricci张量$R_{\alpha\beta}$具有形式

$$R_{\alpha\beta}=(A+\frac{R}{2(n-1)})a_{\alpha\beta}+B\sigma_\alpha\sigma_\beta,\quad(2)$$

其中$a_{\alpha\beta}$、R分别是V_n的度量张量、纯量曲率，A、B是某一纯量，σ_α是协变向量，则V_n称为广义常曲率空间．

当（2）中的$B=0$时，V_n就是常曲率空间．当（2）中的σ_α为$\sigma_\alpha=\frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}$时，$V_n$是拟常曲率空间[5]．当（2）中的$\sigma_\alpha$为$\sigma_\alpha=\frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}$时，并且$A=A(\sigma)$，$B=B(\sigma)$时，$V_n$是亚射影空间间．因此，拟常曲率空间、亚射影空间是广义常曲率空间的子集．

定理1 如果V_n（$n\geq 5$）容有3系相互直交的全脐超曲面，其中一系是常曲率的，一系是爱因斯坦的，一系是广义常曲率的，则V_n是常曲率空间．

* 1984年2月25日收到．

定理 2 如果V_n（$n\geq 5$）容有3系相互直交的全脐超曲面，其中一系是共形平坦的；其余两系分别是常曲率和爱因斯坦的，而且其中一系是常平均曲率的，则V_n是常曲率的.

§2 定理1、定理2的证明

首先证明如下的引理.

引理1 如果V_n（$n\geq 5$）容有3系相互直交的全脐超曲面，其中一系是常曲率的，一系是爱因斯坦的，一系是共形平坦的，则V_n是共形平坦空间.

证明 设X_1、X_2、X_3分别是常曲率、爱因斯坦、共形平坦超曲面的单位法向量. 对于V_n的任一点P，取一固定的正交标架$\{X_1, X_2, X_3, X_4, \cdots\cdots, X_n\}$，并且将它作为该点的坐标架，则有[1]

$$X_a^\beta=\delta_a^\beta \qquad (a,\ \beta=1,2,\cdots\cdots,\ n). \tag{3}$$

并设$\overline{X}_{p_a}$是正交于X_a（$a=1,2,3$）的任何正交标架，并且p_a，q_a，$S_a\cdots\cdots$等表示不同的指标.

V_n的Ricci张量、共形曲率张量分别用$Ric(X, Y)$、$C(X, Y, Z, W)$表示，它们都是多重线性函数，R表示V_n的纯量曲率.

从超曲面的高斯方程及共形曲率张量的表示式，对常曲率超曲面，爱因斯坦超曲面、共形平坦超曲面分别可求得

$$C(\overline{X}_{p_1},\ \overline{X}_{q_1},\ \overline{X}_{q_1},\ \overline{X}_{S_1})=\frac{-1}{n-2}Ric(\overline{X}_{p_1},\ \overline{X}_{S_1}) \tag{4}$$

$$C(\overline{X}_{p_a},\ X_a,\ X_a,\ \overline{X}_{S_a})=-\frac{n-3}{n-2}Ric(\overline{X}_{p_a},\ \overline{X}_{S_a}) \quad (a=1,\ 2), \tag{5}$$

$$C(\overline{X}_{p_3},\ \overline{X}_{q_3},\ \overline{X}_{r_3},\ \overline{X}_{s_3})=0. \tag{6}$$

再从超曲面的科达齐方程，由于超曲面是全脐的，则不难得到

$$C(X_a,\ \overline{X}_{q_a},\ \overline{X}_{r_a},\ \overline{X}_{s_a})=0 \qquad (a=1,2,3), \tag{7}$$

在（4）—（7）中，$p_a=1,2,3,\cdots\cdots,\ n$，但$p_a\neq a$；$q_a$、$S_a\cdots\cdots$等的意义也相同.

由（6）及（7）(在$a=3$时)，在坐标系（3）下有

$$C_{a\beta\gamma\delta}=0 \qquad (a,\ \beta,\ \gamma,\ \delta=1,2,\cdots\cdots,\ n;\ a,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\neq). \tag{8}$$

令$\overline{X}_{q_a}=AX_{q_a}+BX_{r_a}$，$\overline{X}_{r_a}=-BX_{q_a}+AX_{r_a}$，其中$A$、$B$是使$\overline{X}_{q_a}$、$\overline{X}_{r_a}$为单位向量的任意常数. 将它们代入（6）、（7），分别可得

$$C(\overline{X}_{p_3},\ X_{q_3},\ X_{q_3},\ \overline{X}_{s_3})=C(\overline{X}_{p_3},\ X_{r_3},\ X_{r_3},\ \overline{X}_{s_3}), \tag{9}$$

$$C(X_a,\ X_{q_a},\ X_{q_a}\overline{X}_{s_a})=C(X_a,\ X_{r_a},\ X_{r_a},\ \overline{X}_{s_a}) \quad (a=1,2,3) \tag{10}$$

将（10）式对r_a作和，则有

$$C(X_a,\ X_{q_a},\ X_{q_a},\ X_{S_a})=0 \qquad (a=1,2,3) \tag{11}$$

在（4）中置$q_1=2$，在（5）中置$a=2$，得

$$Ric(\overline{X}_p,\ ,\ \overline{X}_s)=0, \tag{12}$$

---

[1] 为简明起见，单位向量的长度均设为1，而对于非正定的情况，证明方法同样适用，只须乘以相应的“e”，$e=\pm 1$.

其中 $\overline{X}_p\ \overline{X}_s$表示正交于$X_1$、$X_2$的任何正交标架的向量.

由于（12），在坐标系（3）下，从（4）、（5）、（11）有

$$C\quad = 0 \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1, 2, \cdots,\ n;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \neq). \tag{13}$$

由$q_1 = 3, 4, \cdots,\ n$的（4）和（5）有①

$$C(\overline{X}_p,\ X_\rho,\ X_\rho,\ \overline{X}_s) = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \cdots,\ n). \tag{14}$$

$$令\overline{X}_p = AX_p + BX_s, \qquad \overline{X}_s = -BX_p + AX_s, \tag{15}$$

其中A、B是使$\overline{X}_p$、$\overline{X}_s$为单位向量的任意常数. 将（15）代入（14），得

$$C(X_p, X_\rho, X_\rho, X_p) = C(X_s,\ X_\rho,\ X_\rho,\ X_s), \quad (p,\ s \neq 1, 2). \tag{16}$$

将（16）对S作和，对于$\rho = a$及$\rho = q$，分别可求得

$$(n-2)C(X_p,\ X_a,\ X_a,\ X_p) = -C(X_1,\ X_2,\ X_2,\ X_1,) \tag{17}$$

$$(n-3)C(X_p,\ X_q,\ X_q,\ X_p) = \frac{2}{n-2}C(X_1,\ X_2,\ X_2,\ X_1), \quad \left(\begin{matrix} p, q = 3, \cdots,\ n \\ a = 1, 2 \end{matrix}\right) \tag{18}$$

其中（18）是利用了（17）得到的.

另一方面，将（9）对r_3作和，可得

$$(n-3)C(\overline{X}_{p_3}, X_{q_3}, X_{q_3}, \overline{X}_{s_3}) + C(\overline{X}_{p_3},\ X_3,\ X_3,\ \overline{X}_{s_3}) = 0 \quad. \tag{19}$$

对（19）施行类似于（15）的代换，并将得到的方程对s_3做和，则有

$$(n-3)C(X_{p_3},\ X_{q_3},\ X_{q_3},\ X_{p_3}) = -[C(X_{p_3},\ X_3,\ X_3,\ X_{p_3}) + C(X_{q_3},\ X_3,\ X_3,\ X_{q_3})]. \tag{20}$$

在（20）中置$p_3 = 1$，$q_3 = 2$，由于（17），且因$n \geq 5$，则得

$$C(X_1,\ X_2,\ X_2,\ X_1) = 0. \tag{21}$$

再由（17）、（18），有

$$C(X_p,\ X_a,\ X_a,\ X_p) = 0 \qquad \left(\begin{matrix} a = 1, 2 \\ p = 3, 4, \cdots,\ n \end{matrix}\right), \tag{22}$$

$$C(X_p,\ X_q,\ X_q,\ X_p) = 0 \qquad (p, q = 3, 4, \cdots,\ n). \tag{23}$$

由（21）、（22）、（23）、在坐标系（4）下，有

$$C_{\alpha\beta\beta\alpha} = 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 1, 2, \cdots,\ n;\ \alpha,\ \beta \neq), \tag{24}$$

由（8）、（13）、（24）可见，在坐标系（4）下有$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$，$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta = 1, 2, \cdots,\ n)$. 由于点P的任意性，故$V_n$（$n \geq 5$）的共形曲率张量为零，即$V_n$是共形平坦空间.

引理 2　如果共形平坦空间V_n（$n \geq 3$）容有两系相互直交的常曲率全脐超曲面，则成立

$$\frac{1}{n-2}R_{\alpha\beta} - \rho a_{\alpha\beta} = \mu(\zeta_{1|\alpha}\zeta_{2|\beta} + \zeta_{1|\beta}\zeta_{2|\alpha}), \tag{25}$$

其中ρ、μ是纯量，$\zeta_{a|\alpha}$（$a = 1, 2$）是两族常曲率全脐超曲面的单位向量的共变分量，而$a_{\alpha\beta}$、$R_{\alpha\beta}$分别是V_n的度量张量和Ricci张量.

证明　因V_n是共形平坦的，故（1）成立. 又按假设，超曲面是全脐常曲率的，故从超曲面的高斯方程可得

$$\left(K - \frac{\Omega^2}{n}\right)(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}) = R_{\alpha\beta\gamma\delta}y^\alpha_{,h}y^\alpha_{,i}y^\gamma_{,j}y^\delta_{,k} \quad. \tag{26}$$

---

①其中$\overline{X}_p$，$\overline{X}_s$的意义见（12）.

将（1）代入（26），且令

$$\widetilde{R}_{ij}=R_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}\,y^{\beta}_{,j},\tag{27}$$

$$H_{ij}=\frac{1}{n-2}\widetilde{R}_{ij}-pg_{ij}\ ,\quad p\text{是纯量}.\tag{28}$$

则有

$$g_{hk}H_{ij}-g_{hj}H_{ik}+g_{ij}H_{hk}-g_{ik}H_{hj}=0\ .\tag{29}$$

将（29）乘 g^{hk} 缩併，得 $H_{ij}=\lambda g_{ij}$. 再将它代回（29）中，可得 $\lambda=0$. 故有 $H_{ij}=0$

于是，从（27）、（28）得 $(\frac{1}{n-2}R_{\alpha\beta}-pa_{\alpha\beta})y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}=0$. 因此，对于第 $a(a=1,\ 2.)$ 族超曲面，则得

$$\frac{1}{n-2}R_{\alpha\beta}-p_a a_{\alpha\beta}=\eta_{a|\alpha}\zeta_{a|\beta}+\eta_{a|\beta}\zeta_{a|\alpha},\tag{30}$$

其中 p_a 是纯量，$\eta_{a|\alpha}$ 是某一共变向量，$\zeta_{a|\alpha}$ 是该族超曲面单位法向量的共变分量.

将 $a=1,2$ 的（30）两式相减，可得

$$(p_2-p_1)a_{\alpha\beta}=\eta_{1|\alpha}\zeta_{1|\beta}+\eta_{1|\beta}\zeta_{1|\alpha}-\eta_{2|\alpha}\zeta_{2|\alpha}\zeta_{2|\beta}-\eta_{2|\beta}\zeta_{2|\alpha}\tag{31}$$

将（31）分别乘以 $\zeta^{\alpha}_{1|}$、$\zeta^{\alpha}_{2|}$ 缩併，相应得

$$\eta_{1|\alpha}=A\xi_{1|\alpha}+B\zeta_{2|\alpha},\quad \eta_{2|\alpha}=C\zeta_{1|\alpha}+D\zeta_{2|\alpha}\tag{32}$$

将（32）代入（31），有

$$(p_2-p_1)a_{\alpha\beta}=2A\zeta_{1|\alpha}\zeta_{1|\beta}+(B-C)(\zeta_{2|\alpha}\xi_{1|\beta}+\zeta_{2|\beta}\zeta_{1|\alpha})-2D\zeta_{2|\alpha}\zeta_{2|\beta}\tag{33}$$

因 $\zeta_{1|\alpha}$、$\zeta_{2|\alpha}$ 是彼此正交的单位向量，且 $n\geq3$, 故可选择单位向量 μ^{α} 使 μ^{α} 与 $\zeta^{\alpha}_{1|}$、$\zeta^{\alpha}_{2|}$ 正交. 将（33）乘 $\mu^{\alpha}\mu^{\beta}$ 缩併，可得

$$p_2-p_1=0\tag{34}$$

再将（33）分别乘以 $\zeta^{\alpha}_{1|}$、$\zeta^{\alpha}_{2|}$ 缩并，由于 $\xi_{1|\alpha}$、$\zeta_{2|\alpha}$ 线性无关，并利用（34），则有 $A=0$，$B=C$，$D=0$. 于是，（32）成为 $\eta_{1|\alpha}=B\zeta_{2|\alpha}$, $\eta_{2|\alpha}=B\zeta_{1|\alpha}$. 再由于(34),(30)就化为（25）.

引理3 若共形平坦空间 V_n（$n\geq4$）容有3系相互直交的全脐超曲面，其中两系是常曲率曲率的，一系是广义常曲率的，则 V_n 是常曲率空间.

证明 设共形平坦空间容有3系相互直交的全脐超曲面，其中第一、第一族是常曲率的，第三族是广义常曲率的.

对第三族广义常曲率超曲面，由（1）、（2）可见，其曲率张量具有形式

$$R_{hijk}=t(g_{hk}g_{ij}-g_{hj}g_{ik})+s(g_{ij}\sigma_h\sigma_k-g_{ik}\sigma_h\sigma_j+g_{hk}\sigma_i\sigma_j-g_{hj}\sigma_i\sigma_k)\ .\tag{35}$$

将（35)、（1）代入第三族常义常曲率超曲面的高斯方程中，类似于（30）的证明，可得

$$\frac{1}{n-2}R_{\alpha\beta}-p_3a_{\alpha\beta}-Q_3\widetilde{\sigma}_\alpha\widetilde{\sigma}_\beta=\eta_{3|\alpha}\zeta_{3|\beta}+\eta_{3|\beta}\zeta_{3|\alpha},\tag{36}$$

其中 p_3、Q_3 是纯量、$\widetilde{\sigma}_\alpha$ 是 σ_i 在 V_n 中的外在分量，即 $\sigma_i=\widetilde{\sigma}_\alpha y^{\alpha}_{,i}$，且有

$$\widetilde{\sigma}_\alpha\,\zeta^{\alpha}_{3|}=0\ .\tag{37}$$

根据引理2，（25）成立. 将（25）与（36）相减，将得到的方程乘 $\zeta^{\alpha}_{3|}$ 缩併，则有 $\eta_{3|\alpha}\sim\zeta_{3|\alpha}$. 从而所得方程化为

$$(p_3-\rho)a_{\alpha\beta}+Q_3\widetilde{\sigma}_\alpha\widetilde{\sigma}_\beta=\mu(\zeta_{1|\alpha}\zeta_{2|\beta}+\xi_{1|\beta}\zeta_{2|\alpha})-\nu\zeta_{3|\alpha}\xi_{3|\beta},\tag{38}$$

其中γ是纯量.

因$n\geq 4$，故有单位向量μ^a，它正交于$\xi_{a|}{}^a$（$a=1, 2, 3$）. 将（38）乘μ^a缩并，则有$p_3=\rho$或者$\mu^a\sim\tilde{\sigma}^a$. 若$\mu^a\sim\tilde{\sigma}^a$，则$\tilde{\sigma}_a$、$\xi_{a|a}$（$a=1, 2, 3$）两两正交. 将（38）乘$\xi_{1|}{}^a\xi_{1|}{}^\beta$缩并，亦有$p_3=\rho$. 因此，（38）成为

$$\mu(\xi_{1|a}\xi_{2|\beta}+\xi_{2|a}\xi_{1|\beta})=Q_3\tilde{\sigma}_a\tilde{\sigma}_\beta+\gamma\xi_{3|a}\xi_{3|\beta}. \tag{39}$$

将（39）乘以$\xi_{1|}{}^a$缩併，得$Q_3\xi_{1|}{}^a\tilde{\sigma}_a\tilde{\sigma}_\beta=\mu e_1\xi_{2|\beta}$，其中$e_1=\xi_{1|}{}^a\xi_{1|a}$. 若$Q_3\xi_{1|}{}^a\tilde{\sigma}_a=0$，则$\mu=0$. 由（25）可见，$V_n$是爱因斯坦的，从而是常曲率的. 若$Q_3\xi_{1|}{}^a\tilde{\sigma}_a\neq 0$，则$\tilde{\sigma}_a=\rho_2\xi_{2|a}$. 同理有$\tilde{\sigma}_a=\rho_1\xi_{1|a}$. 因$\xi_{1|a}$，$\xi_{2|a}$线性无关，故$\tilde{\sigma}_a=0$. 从而（39）化为

$$\mu(\xi_{1|a}\xi_{2|\beta}+\xi_{2|a}\xi_{1|\beta})=\nu\xi_{3|a}\xi_{3|\beta}. \tag{40}$$

将（40）乘以$\xi_{1|}{}^a\xi_{2|}{}^\beta$缩併，得$\mu=0$. 再由（25）可见，$V_n$是爱因斯坦的，从而是常曲率的.

引理 4. 若共形平坦空间V_n（$n\geq 3$）容有两系相互直交的常曲率全脐超曲面，并且其中一系是常平均曲率的，则V_n是常曲率空间.

证明 设V_n的两系相互直交的常曲率全脐超曲面的单位法向量是$\xi_{a|}{}^a$（$a=1, 2$）. 根据引理2，（25）成立.

另一方面，不妨设第一系是常平均曲率的，则该系超曲面的科达齐方程化为$R_{a\beta\gamma\delta}\xi_{1|}{}^a y^\beta_i y^\gamma_i y^\delta_k=0$. 因$\xi_{2|}{}^a$是该系超曲面的切向，故设其内在分量是$\tilde{\xi}_{2|}{}^k$，于是有$\xi_{2|}{}^a=\tilde{\xi}_{2|}{}^k y^a_k$. 将上述科达齐方程乘以$g^{ij}\tilde{\xi}_{2|}{}^k$缩併，则得$R_{a\beta}\xi_{1|}{}^a\xi_{2|}{}^\beta=0$. 再将(25)乘$\xi_{1|}{}^a\xi_{2|}{}^\beta$缩併有$\mu=0$. 因此，$V_n$是爱因斯坦的，从而是常曲率的.

众所周知，共形平坦空间的全脐超曲面是共形平坦的. 由引理1、引理3可得定理1. 由引理1、引理4可得定理2.

定理1. 定理2的条件的不可削弱性，兹见如下三例.

例 1 设V_n（$n\geq 5$）的线素为

$$ds^2=e_1dx^{1^2}+H(x^1)\{e_2A^2dx^{2^2}+e_3B^2dx^{3^2}+g_{ij}(x^k)dx^idx^j\}\quad(i, j, k=4, \cdots, n),$$

其中

$$g_{ij}(x^k)dx^idx^j=\frac{\Sigma e_idx^{i^2}}{\left[1+\frac{\kappa}{4}\Sigma e_ix^{i^2}\right]^2},\quad \kappa=\text{const},$$

$$A=\frac{-\frac{\kappa}{4}f_2\Sigma e_ix^{i^2}+\Sigma d_{2|i}x^i+f_2}{1+\frac{\kappa}{4}\Sigma e_ix^{i^2}}\qquad B=\frac{-\frac{\kappa}{4}f_3\Sigma e_ix^{i^2}+\Sigma d_{3|i}x^i+f_3}{1+\frac{\kappa}{4}\Sigma e_ix^{i^2}},$$

式中的f_a、$d_{a|i}$（$a=2, 3$）仅为x^a的任意函数，但满足$\Sigma e_id_{2|i}d_{3|i}+\kappa f_2f_3=0$，$H(x^1)$是$x^1$的任意函数，但使得$H''-e_1\kappa H\neq 0$，则$V_n$容有3系相互直交的超曲面，其中超曲面系$x^1=\text{const}$是常曲率全脐的，$x^2=\text{const}$、$x^3=\text{const}$都是亚射影全测地的，并且$V_n$不是常曲率空间.

例2 设V_n的线素为$ds^2=\frac{1}{H^2}\sum_{i=1}^n e_idx^{i^2}$，$H=C\sum_{i=1}^n e_ix^{i^2}+fx^1x^2+\sum_{i=1}^n d_ix^i+e$，其中$C$、$f$（$\neq 0$）、$d_i$、$e$是任意常数，则$V_n$容有$n$重正交全脐超曲面系统，其中$x^1=\text{const}$、$x^2=\text{const}$都是常曲率的，其余的超曲面系是共形平坦的，并且$V_n$不是常曲率空间.

例 3 设V_n的线素为

$$ds^2 = e_1\sigma^2 dx^{1^2} + H^{-2}(x^n)\left(\sum_{i=2}^{n} e_i dx^{i^2}\right),$$

其中H满足 $(n-1)H'^2 - 2HH'' = \text{const}$, $H'' \neq 0$，而σ为

为 $\sigma = A\exp\left[-\int \frac{\left(\zeta - \frac{R}{2(n-2)}\eta'\right)}{\zeta'} dx^n\right]$, $A = \text{const} \neq 0$,

$$\zeta(x^n) = \frac{1}{2}e_n H'^2, \quad \eta(x^n) = -\frac{H''}{H}, \quad R = \text{const},$$

则V_n容有n重正交系统，其中$x^1 = \text{const}$是亚射影全测地的，$x^2 = \text{const}$、$x^3 = \text{const}, \cdots$, $x^{n-1} = \text{const}$都是爱因斯坦全测地的，并且V_n不是常曲率空间.

证明从略.

参 考 文 献

〔1〕胡和生，常曲率空间的直交全测地超曲面系，科学记录，2 (1958)，1 — 5 .

〔2〕黄城超，常曲率空间与全脐超曲面,数学学报,8(1958)，490—495.

〔3〕白正国，共形平坦黎曼空间及常曲率空间的曲率张量的特征，数学进展，9(1966)，175—182.

〔4〕沈一兵，常曲率空间的直交全脐超曲面系，北京双微会议论文集，1980.

〔5〕黄正中，关于拟常曲率空间的某些定理（英文），数学研究与评论，3(1983)，1 —16.

The Characterizations of the orthogonal System of Totally Umbilical Hypersurfaces in a Space of Constant Curvature

Wu Shao-hua

Abstract

Let V_n be Riemannian space of genernal constant curvature.

In this paper, we have proved following:

Theorem 1 If a V_n ($n \geq 5$) admits three mutually orthogonal families of totally numbilical hypersurfaces such that they are of constant curvature and Einsteinian and of general constant curvature respectively, then V_n is space with constant curvature.

Theorem 2 If a V_n ($n \geq 5$) admits three mutually orthogonal famities of totally umbilical hypersurfaces, of which one is conformally flat and other two are Einsteinian and of constant curvature respectively, and latter either is of constant meam curvature, then V_n is of constant curvature.