A_l型Weyl模的张量积及其Ext^1-群*

杜 杰
（华东师范大学）

设 $\mathfrak{g}=sl(l+1, \mathbf{C})$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的半单李代数，$\mathfrak{h}$是由$\mathfrak{g}$的对角矩阵组成的子代数，ω_i是定义在$\mathfrak{h}$上的坐标函数，则 $\Phi=\{\omega_i-\omega_j \mid 1\leq i\neq j\leq l+1\}$ 是由$\mathfrak{g}$确定的根系，$\Delta=\{\omega_i-\omega_{i+1}\mid 1\leq i\leq l\}$ 是Φ的一个基．于是，与Δ对应的基本权是 $\lambda_j=\omega_1+\cdots+\omega_j$ $(1\leq j\leq l)$．权格X是λ_j的$\mathbf{Z}$-张成，X中支配权的全体记为X^+．

设K是特征数 $p>0$ 的代数闭域，$G=SL(l+1, K)$ 是K上与$\mathfrak{g}$同型的单连通半单代数群，则G的超代数$\mathcal{U}_k$由元素 $e_{ij}(s)=e_{ij}^s/s!\otimes 1$ 生成，其中e_{ij}是对应于 $\omega_i-\omega_j$的根向量，即$\mathfrak{g}$中 (i, j) 分量是1，其余分量为0的矩阵．设B是对应于Φ^-的G的Borel 子群，则B的超代数$\mathcal{B}_K^-=\mathcal{N}_K^-\mathcal{H}_K$，其中$\mathcal{N}_K^-$是由$e_{ij}(s)$ $(i>j)$ 生成的$\mathcal{U}_K$的子代数，$\mathcal{H}_K$是G中对角矩阵所成的极大环面T的超代数．于是，$\mathcal{B}_K$模范畴与有理B模范畴是同构的．因此对任意$\lambda\in X=X(B)$确定的一维B模，$\mathcal{N}_K^-$的作用是平凡的．对每个$\lambda\in X^+$，$V(\lambda)_{\mathbf{C}}$表示首权是λ的不可约$\mathfrak{g}$模，由它得到的Weyl模记为$V(\lambda)$．

关于Weyl模张量积的Weyl滤过的存在性〔6〕中已经得到了解决．本文在此基础上，结合〔2〕中关于模$H^0(m\lambda_1)$的讨论，试图确定A_l型Weyl模张量积的Weyl滤过商，研究了这种张量积的商的一些性质；同时，根据〔1〕的结果，求得了某些不可约模的扩张群．

利用这个机会，我谨向导师曹锡华教授和其他有关同志的指导和帮助表示衷心的感谢．

§1 Weyl滤过商

固定正整数m，令

$$B(m)'=\{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{l+1})\mid \beta_i\in\mathbf{Z}, \sum_{i=1}^{l+1}\beta_i=m\},$$

$B(m)$ 表示m的长度为 $l+1$ 的所有分划全体，则$B(m)\subset B(m)'$．用$D_{m,\mathbf{C}}$表示$B(m)$中元素的形式线性组合全体形成的复向量空间，且记$\pi_j=(\delta_{j1}, \delta_{j2}, \cdots, \delta_{jl+1})$，$1\leq j\leq l+1$，其中$\delta_{ij}$是Kronecker符合．定义$\mathfrak{g}$在$D_{m,\mathbf{C}}$上的作用

$$e_{ij}\cdot\beta=\beta_j(\beta+\pi_i-\pi_j),\quad h\cdot\beta=\sum_{i=1}^{l+1}\beta_i\cdot\omega_i(h)\beta.$$

其中 $h\in\mathfrak{h}$，$\beta\in B(m)$．则（参看〔2〕）$D_{m,\mathbf{C}}$成为$\mathfrak{g}$模．

（1.1）引理 （a）$B(m)$ 中元素是$D_{m,\mathbf{C}}$的权向量，且$\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{l+1})$ 的权是 $\beta\omega=\beta_1\omega_1+\beta_2\omega_2+\cdots+\beta_{l+1}\omega_{l+1}$；

（b）$D_{m,\mathbf{C}}$的所有权的重数为1，且$\dim D_{m,\mathbf{C}}=\binom{m+l}{l}$；

* 1985年3月30日收到．曾在1984年9月“北京国际群论会议”上宣读．推荐者：曹锡华．

（c）$D_{m,C}$和$V(m\lambda_1)_C$作为$\mathfrak{g}$模是同构的.

现在用$D_{m,Z}$表示$B(m)$的$\mathbf{Z}$-张成，则$D_{m,Z}$形成了$D_{m,C}$的容许格. 令$D_{m,K}=D_{m,Z}\otimes_Z K$，这是一个$\mathcal{U}_K$模. 将$\beta\otimes 1$简记为$\beta$，则$\mathcal{U}_K$的生成元$e_{ij}(s)$通过如下方式作用在$D_{m,K}$上：

$$e_{ij}(s)\cdot\beta=\binom{\beta_j}{s}1_K(\beta+s\pi_i-s\pi_j).$$

以下引理是〔2〕中的Prop.2.1 .

（1.2）引理 $D_{m,K}$和$V(m\lambda_l)^*$作为G模是同构的.

设$\mu\in X^+$，$\chi(\mu)=\mathrm{ch}V(\mu)_C$表示$V(\mu)_C$的形式特征标，由引理（1.1）得到$\chi(m\lambda_1)=\sum_{\beta\in B(m)}e(\beta\omega)$. 于是，由〔4〕的（1），对任意的$\lambda=\sum_{i=1}^{l}m_i\lambda_i\in X^+$，我们有

$$(1)\qquad \chi(m\lambda_1)\chi(\lambda)=\sum_{\beta\in B(m)}\chi(\beta\omega+\lambda).$$

对每个单根$\alpha_i=\omega_i-\omega_{i+1}$，可以把反射$\sigma_{\alpha_i}=\sigma_i$与置换$(i,\ i+1)$等同起来（参看〔3〕§12），因此

$$\sigma_i\omega_j=\begin{cases}\omega_j, & \text{当 } j\neq i,\ i+1 \text{ 时},\\ \omega_{i+1}, & \text{当 } j=i \text{ 时},\\ \omega_i, & \text{当 } j=i+1 \text{ 时}.\end{cases}$$

用δ表示Φ的正根和之半，定义Weyl群在X上的点作用.

$$w\cdot\lambda=w(\lambda+\delta)-\delta.$$

（1.3）引理 设a，b是任意整数，则$\sigma_i\cdot(a\omega_i+b\omega_{i+1})=(b-1)\omega_i+(a+1)\omega_{i+1}$，

根据这个引理，经过计算得到

$\sigma_i\cdot(\beta\omega+\lambda)=\beta_1\omega_1+\cdots+\beta_{i-1}\omega_{i-1}+(\beta_{i+1}-m_i-1)\omega_i+(\beta_i+m_i+1)\omega_{i+1}+\beta_{i+2}\omega_{i+2}+\cdots+\beta_{l+1}\omega_{l+1}+\lambda.$

因此，我们可以诱导Weyl群在$B(m)'$上的一个作用“$\circ$”：

$\sigma_i\circ(\beta_1,\cdots,\beta_i,\beta_{i+1},\cdots,\beta_{l+1})=(\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\beta_{i+1}-m_i-1,\beta_i+m_i+1,\beta_{i+2},\cdots,\beta_{l+1}).$

满足$\sigma_i\cdot(\beta\omega+\lambda)=(\sigma_i\circ\beta)\omega+\lambda$.

以下引理也是容易证明的.

（1.4）引理 设$\lambda=a_1\omega_1+a_2\omega_2+\cdots+a_{l+1}\omega_{l+1}$，则$\lambda\in X^+\Leftrightarrow a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_{l+1}$.

现在我们来证明以下的命题：

（1.5）命题 设m是正整数，λ是支配权，$\lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_l\lambda_l$. 令$V_C=V(m\lambda_1)_C\otimes V(\lambda)_C$，则$V_C$的合成因子的最高权的集合为$\Pi=\{\beta\omega+\lambda\mid\beta\in B_1\}$，其中$B_1=\{\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_{l+1})\in B(m)\mid\beta_{i+1}\leq m_i,\ 1\leq i\leq l\}$. 此外，每个合成因子恰好出现一次.

证 由（1）可得

$$\mathrm{ch}V_C=\sum_{\mu\in\Pi}\chi(\mu)+C.$$

从引理（1.4）可以推出$\Pi\subset X^+$. 于是Π中的权没有两个在同一Weyl群轨道中，因此只需证$C=0$.

令$B_j=\{\beta\in B(m)\mid\beta_{i+1}\leq m_i,\ i=j,\ j+1,\cdots,\ l+1;\ \beta_j>m_{j-1}\}$，这里$1\leq j\leq l+$

1．显然，$B(m)=\bigcup_{j=1}^{l+1}B_j$，$B_j\cap B_i=\phi$，对任意的 $i\neq j$．并且 [illegible]

取 $\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{l+1})\in B_j$，[illegible]且令 $b=\beta_{j-1}+\beta_j>m_{j-1}$，则当 $x=b$, $b-1$, $\cdots$, $m_{j-1}+1$ 时，[illegible] x, $\beta_{j+1}, \cdots, \beta_{l+1})\in B_j$，而且根据定义，可得到 σ_{j-1} 在这些元素上的作用．

$\beta(x)$	$(0, b)$	$(1, b-1)$	$\cdots$ $(b-m_{j-1}-1, m_{j-1}+1)$
$\sigma_{j-1}\beta(x)$	$(b-m_{j-1}-1, m_{j-1}+1)$	$(b-m_{j-1}-2, m_{j-1}+2)$	$\cdots(0, b)$

（这里将固定的坐标省略了．）[illegible]讨论得到

$$\sum_{x=m_{j-1}+1}^{b}\chi(\beta(x)\omega+\lambda)=0$$

令 $B_j'=B_j\setminus\{\beta(x)\mid x=b, b-1, \cdots, m_{j-1}+1\}$．代替 B_j，对 B_j' 重复上面的讨论可见，$\sum_{\beta\in B_j}\chi(\beta\omega+\lambda)=0$．因此，$C=0$．证毕．

根据这一命题以及〔6〕的Theorem B和Lemma 3.1，不难证明：

（1.6）定理 设 m, m_s $(1\leq s\leq l)$ 是正整数，则 $V=V(m\lambda_1)\otimes V(m_s\lambda_s)$ 有Weyl滤过

$$0=V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_{r+1}=V,$$

其中 $r=\min(m, m_s)$，并且对每个 $0\leq i\leq r$，

$$V_{i+1}/V_i\cong V((m-i)\lambda_1+(m_s-i)\lambda_s+i\lambda_{s+1}).$$

§2 张量积的商

设W是B模，$H^0(W)=H^0(G/B, \mathscr{L}(W))$ 表示从W诱导得到的G模（参看〔5〕§13）对每个 $\lambda\in X^+$，从引理（1.2）我们有

（2） $$H^0(m\lambda_1)\simeq D_{m,K}.$$

以下引理在诱导表示理论中通常称为张量积恒等式．

（2.1）引理 设W是有理B模，V是有理G模，则有下列G模同构

$$H^0(W)\otimes V\cong H^0(W\otimes V).$$

（2.2）命题 设 m_1，m_l 是正整数，则存在G模同构

$$V(m_1\lambda_1)\otimes V(m_l\lambda_l)/V(m_1\lambda_1+m_l\lambda_l)\xrightarrow{\sim}V((m_1-1)\lambda_1)\otimes V((m_l-1)\lambda_l).$$

证 对每个 $\lambda\in X$，λ 可以确定一个一维B模，我们仍记它为 λ．令 v，v' 分别表示 $(m_l-1)\lambda_l$，$m_l\lambda_l$ 的基，$B(m)$ 取为 $D_{m,K}$ 的基，则对任意的 $\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_{l+1})\in B(m_l-1)$，定义 $\beta'=(\beta_1', \cdots, \beta_{l+1}')\in B(m_l)$ 如下：

$$\beta_i'=\beta_i,\quad 1\leq i\leq l;\quad \beta_{l+1}'=\beta_{l+1}+1.$$

于是，得到了从 $B(m_l-1)$ 到 $B(m_l)$ 的单射 $\beta\mapsto\beta'$．

现在定义线性映射 φ：$(m_l-1)\lambda_l\otimes D_{m_l-1,K}\to m_l\lambda_l\otimes D_{m_l,K}$，使得 $\varphi(v\otimes\beta)=v'\otimes\beta'$，对所有的 $\beta\in B(m_l-1)$．从前一节的讨论，我们可以证明 φ 是 $\mathscr{B}$ 模同态．因此 φ 是B模同态且 φ 是单射．于是，从（2）我们得到了一个单射的B模同态．

$$\varphi:(m_l-1)\lambda_l\otimes H^0((m_l-1)\lambda_1)\to m_l\lambda_l\otimes H^0(m_l\lambda_1).$$

从张量积恒等式以及对偶性，我们有G模同态

$$\pi: \mathrm{V}(m_1\lambda_1)\otimes \mathrm{V}(m_l\lambda_l) \longrightarrow \mathrm{V}((m_1-1)\lambda_1)\otimes \mathrm{V}((m_l-1)\lambda_l),$$

且π是满射．因此得短正合列

$0 \to \ker\pi \to \mathrm{V}(m_1\lambda_1)\otimes \mathrm{V}(m_l\lambda_l) \to \mathrm{V}((m_1-1)\lambda_1)\otimes \mathrm{V}((m_l-1)\lambda_l) \to 0$，并且$\mathrm{ch}(\ker\pi) = \chi(m_1\lambda_1+m_l\lambda_l)$．根据〔6〕Prop3.3，$\ker\pi$有Weyl滤过，这就迫使$\ker\pi \cong \mathrm{V}(m_1\lambda_1+m_l\lambda_l)$．因此，命题得证．

结合定理（1.6），再利用归纳法，我们可以证明下面的定理．

（2.3）定理 设m_1，m_l是正整数，$r=\min(m_1, m_l)$，则$\mathrm{V}=\mathrm{V}(m_1\lambda_1)\otimes \mathrm{V}(m_l\lambda_l)$ 有Weyl滤过

$$0=\mathrm{V}_0\subset \mathrm{V}_1\subset\cdots\subset \mathrm{V}_r\subset \mathrm{V}_{r+1}=\mathrm{V}$$

使得对任意的$0\le i\le r$，

$$\mathrm{V}/\mathrm{V}_i\cong \mathrm{V}((m_1-i)\lambda_1)\otimes \mathrm{V}((m_l-i)\lambda_l).$$

§3 Ext¹-群的计算

设m是正整数，$p^n\le m<p^{n+1}$，令

$$\mathrm{E}=\{(a_1,\cdots,a_n)\mid a_i\in\{0,1,\cdots,l\}\}.$$

在E上定义偏序：$a\prec a'\Leftrightarrow a_i\le a_i'$，对所有的$i$，这里$a=(a_1,\cdots,a_n)$，$a'=(a_1',\cdots,a_n')$是E中的元素．称E的子集F是闭的，如果对任意的$a\in\mathrm{F}$，若$a'\prec a$，则$a'\in\mathrm{F}$．对E的子集可以同样定义偏序$\prec$和闭子集的概念．

根据〔2〕中的结构定理可知，存在E的子集E(m)，使E(m)的非空闭子集与$\mathrm{D}_{m,\mathrm{K}}$的子模一一对应：$\mathrm{F}\to \mathrm{X}_\mathrm{F}$．并且，如果$a$是闭集$\mathrm{F}\subset\mathrm{E}(m)$中的极大元素，则$\beta^a\omega$是不可约模$\mathrm{X}_\mathrm{F}/\mathrm{X}_{\mathrm{F}\setminus\{a\}}$的最高权．

令$a^i=(0,\cdots,0,\overset{(i)}{1},0,\cdots,0)\in\mathrm{E}$，$1\le i\le n$，$\mathrm{I}=\{i\in\{1,\cdots,n\}\mid a^i\in\mathrm{E}(m)\}$．

（3.1）引理 设$m=a_0+a_1p+\cdots+a_np^n$是m的p-adic展式，则

（a）$i\in\mathrm{I}\Leftrightarrow a_i\ge 1$，特别$n\in\mathrm{I}$．

（b）$\mathrm{E}(m)\setminus\{(0,\cdots,0)\}$中的极小元素是所有的$a^i$，$i\in\mathrm{I}$．

证 利用〔2〕Prop.2.4，不难证明所述的结果．

（3.2）推论 如果$\mathrm{Soc}_\mathrm{G}\mathrm{V}$表示G模V的基座，那么

$$\mathrm{Soc}_\mathrm{G}(\mathrm{H}^0(m\lambda_1)/\mathrm{L}(m\lambda_1))\cong \bigoplus_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{L}(\beta^{a^i}\omega).$$

（3.3）定理 设m是正整数，$m=\sum_{i=0}^{n}a_ip^i$是m的p-adic展式，则对任意的$\lambda\in\mathrm{X}^+$，$m\lambda_1$不小于λ（关于X上通常的偏序）有

$$\mathrm{Ext}_\mathrm{G}^1(\mathrm{L}(\lambda), \mathrm{L}(m\lambda_1))=\begin{cases}\mathrm{K}, & \text{当}\lambda=\beta^{a^i}\omega,\ \text{且}a_i\ge 1\text{时}\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

式中$\mathrm{L}(\mu)$表示最高权为$\mu\in\mathrm{X}^+$的不可约G模．

证 用$\mathrm{M}(\mu)$表示$\mathrm{V}(\mu)$的极大子模，$\mu\in\mathrm{X}^+$．我们有短正合列

$$0\to \mathrm{M}(m\lambda_l)\to \mathrm{V}(m\lambda_l)\to \mathrm{L}(m\lambda_l)\to 0$$

由此可以推出对偶模$M(m\lambda_l)^* \cong H^0(m\lambda_1)/L(m\lambda_1)$. 从〔1〕Cor (3.10) 得到

$$Ext^1_G(L(\lambda), L(m\lambda_1)) \cong Hom_G(L(\lambda), H^0(m\lambda_1)/L(m\lambda_1)).$$

再由上面的推论得

$$\dim Hom_G(L(\lambda_1), H^0(m\lambda_1)/L(m\lambda_1)) = \begin{cases} 1, & 若\lambda = \beta^{a^i}\omega, \quad i \in I \\ 0 & 否则 \end{cases}$$

这就证明了所要的结果.

参 考 文 献

〔1〕E. Cline, B. Parshall, L. Scott and W. van der Kallen, Rational and generic cohomology, Ivent. Math., 39 (1977), 143-163.

〔2〕R. Doty, The submodule structure of certain Weyl modules for groups of type A_n, preprint.

〔3〕J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, GTM9, Springer Verlag 1972.

〔4〕J. C. Jantzen, Zur Charakterformal gewisser Darstellungen halbeinfacher Gruppen and Lie Algebren, Math. Zeit. 140(1974), 127—149.

〔5〕曹锡华, 王建磐,《线性代数表示理论导引》科学出版社(待出版)

〔6〕Wang Jian-pan (王建磐), Sheaf cohomology on G/B and tensor products of Weyl modules, J. Alg., 77(1982), 162—185.

Tensor Products of Weyl Modules and Ext^1-groups for Type A_l

Du Jie

(East china Normal University)

Abstract

Let $G = SL(l+1, K)$ be a simply connected, semi-simple algebraic group of type A_l over an algebraically closed field of characteristic $p>0$. In this paper, we give a complete description of Weyl filtration quotients of tensor products of the form $V(m\lambda_1) \otimes V(\lambda)$; some isomorphisms between such tensor products and its quotients are established. We get also some Ext^1 groups for irreducible G-modules.