1987年8月

数学研究与评论
第七卷　第三期

以单叶函数为符号的解析Toeplitz算子的拟相似性*

郭　多　祚

（东北财经大学，大连）

引　　言

Sz.-Nagy和Foias在〔8〕中证明拟相似的酉算子是酉等价的．Hoover在〔5〕中证明拟相似的等距算子是酉等价的．Halmos 在〔4〕中指出拟相似的正规算子酉等价，而确有相似但非酉等价的次正规（subnormal）算子（见〔4〕问题152 和156）．

本文讨论了一类特殊的次正规算子——解析Toeplitz算子的拟相似性与酉等价性之间的关系，得到如下结果：

若φ，$\psi\in H^{\infty}$且单叶，则下列诸条件等价：

（i）有稠值域算子S，T使$ST_{\varphi}=T_{\psi}S$，　$TT_{\psi}=T_{\varphi}T$；

（ii）T_{φ}与T_{ψ}拟相似；

（iii）T_{φ}与T_{ψ}酉等价；

（iv）range φ = range ψ．

并且有例子说明单叶性条件是不可取消的．

主　要　结　果

在本文中以H表示复的可分的Hilbert 空间，$\mathscr{B}(H)$表示H上全体有界线证算子构成的Banach 代数．D表示单位圆盘$\{z;|z|<1\}$，C表示单位圆周，μ表示C上的正规化的Lebesgue 测度．H^2和H^{∞}为Hardy空间，本文引用$H^2(D)$与$H^2(C)$两种形式，众所周知$H^2(D)$与$H^2(C)$等距同构（详见〔3〕）．

设$\varphi\in H^{\infty}$，$f\in H^2$，称$T_{\varphi}f=\varphi f$ 为以φ为符号的解析Toeplitz算子．

为以后的应用，我们首先证明两个引理：

引理1　设a是复数，$|a|<1$，令　$B_a(z)=\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$，$\varphi\in H^{\infty}$，则$T_{\varphi}$与$T_{B_a(z)}$酉等价．

证明　由〔1〕定理2.1，T_z与$T_{B_a(z)}$酉等价．故有酉算子V使$T_{B_a(z)}=V^{-1}T_zV$．

设$\varphi\in H^{\infty}(C)$，设其Fourier 展式为$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，设$\{\sigma_k(z)\}$为$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$的Cesaro平均序列，则

（1）$|\sigma_k(z)|\le\|\varphi\|_{\infty}$　$a.e.$于C，

* 1983年1月12日收到．

（2）有子序列 $\{\sigma_{k_j}(z)\}$ 使 $\sigma_{k_j}(z)\longrightarrow\varphi(z)$ 当 $j\to\infty$, $a.e.$ 于C．

于是由（1），（2）两式或及 Lebesgue 控制收敛定理，对于任何 $f\epsilon H^2(C)$ 有 $\int_C|(\varphi(z)-\sigma_{k_j}(z))f(z)|^2 d\mu\longrightarrow 0$，当 $j\to\infty$时．即在强收敛意义之下有

$$T_\varphi=\lim_{j\to\infty}\sigma_{k_j}(T_z).$$

显然还有

（1）′ $|\sigma_k(B_a(z))|\le\|\varphi\|_\infty$ $a.e.$ 于C，

（2）′ $\sigma_{k_j}(B_a(z))\longrightarrow\varphi(B_a(z))$ $a.e.$ 于C．

于是对于任何 $f\epsilon H^2(C)$，还是由 Lebesgue 控制收敛定理，有

$\int_C|\varphi(B_a(z))-\sigma_{k_j}(B_a(z))f(z)|^2 d\mu\to 0$，当 $j\to\infty$时．

于是在强收敛的意义之下，有

$$T_{\varphi(B_a(z))}=\lim_{j\to\infty}T_{\sigma_{k_j}(B_a(z))}=\lim_{j\to\infty}\sigma_{k_j}(T_{B_a(z)})=\lim_{j\to\infty}V^{-1}\sigma_{k_j}(T_z)V=V^{-1}T_\varphi V$$

这说明 $T_{\varphi(B_a(z))}$ 与 T_φ 酉等价．证毕．

若 $A=\mathscr{B}(H)$，令 $R(A)=\{Af;\ f\epsilon H\}$，$\ker A=\{f;\ Af=0;\ f\epsilon H\}$

引理2 设 A，B，S，$T\epsilon\mathscr{B}(H)$，$R(S)$，$R(T)$ 都在H中稠密，且 $SA=BS$，$TB=AT$，则

$$\ker A^* \text{的维数}=\ker B^* \text{的维数}.$$

证明 任取 $f\epsilon\ker B^*$，由假设 $SA=BS$，故

$$A^*S^*f=S^*B^*f=0$$

这说明 $S^*\ker B^*\subset\ker A^*$，又由值域定理及假设

$$\ker S^*=R(S)^{\perp}=\{0\}$$

故 S^* 是一对一的，由〔4〕问题42之解，

$$\ker A^* \text{的维数}\ge\ker B^* \text{的维数},$$

同样可证

$$\ker A^* \text{的维数}\le\ker B^* \text{的维数}.$$

故

$$\ker A^* \text{的维数}=\ker B^* \text{的维数}.\quad \text{证毕}.$$

定理3 设 $\varphi,\psi\epsilon H^\infty$ 且单叶，$\mathrm{range}\varphi=\mathrm{range}\psi$，则 T_φ 与 T_ψ 酉等价．

证明 设 $\varphi,\psi\epsilon H^\infty(D)$，因 φ 单叶，故 φ 的反函数 φ^{-1} 是从 $\mathrm{range}\varphi\longrightarrow D$ 上的单叶解析函数，同样 ψ^{-1} 是从 $\mathrm{range}\psi\longrightarrow D$ 上的单叶解析函数．令 $F(z)=\varphi^{-1}(\psi(z))$，$F^{-1}(z)=\psi^{-1}(\varphi(z))$，因 $\mathrm{range}\varphi=\mathrm{range}\psi$，故上述两个函数都是从D到D上的单叶函数，由〔7〕定理12.6，

$$F(z)=\lambda\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

其中 $|\lambda|=1$，$F(a)=0$．

若 $\varphi(0)=\psi(0)$，则 $F(0)=F^{-1}(0)=0$，此时 $F(z)=\lambda z$，$F^{-1}(z)=\frac{1}{\lambda}z$．令 $Uf(z)=f(\lambda z)$，$U^{-1}f(z)=f(\frac{1}{\lambda}z)$，$f(z)\epsilon H^2(D)$．任取 $f,g\epsilon H^2(D)$ 及复数 a，

β，有

$U(\alpha f(z)+\beta g(z))=(\alpha f+\beta g)(\lambda z)=\alpha f(\lambda z)+\beta g(\lambda z)=\alpha Uf(z)+\beta Ug(z)$.

又$H^2(D)$与$H^2(C)$等距同构，故

$$\|Uf(\lambda)\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\lambda e^{i\theta})|^2 d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^2 d\theta=\|f(z)\|^2$$

故U为等距算子，直接验证可知

$$UU^{-1}=U^{-1}U=I.$$

这说明U是酉算子，且任取$f\in H^2(D)$，

$UT_\varphi f(z)=U(\varphi(z)f(z))=\varphi(\lambda z)f(\lambda z)=\varphi(\varphi^{-1}(\psi(z)))f(\lambda z)=\psi(z)Uf(z)$,

故$T_\varphi=U^{-1}T_\psi U$. 这说明T_φ与T_ψ酉等价.

若$\varphi(0)\neq\psi(0)$，因rangeφ=rangeψ，故有$a\in D$使$\varphi(a)=\psi(0)$. 令$B_{-a}(z)=\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$，$\varphi_1(z)=\varphi(B_{-a}(z))$，则$\varphi_1(0)=\varphi(a)=\psi(0)$.

由前段证明，T_{φ_1}与T_ψ酉等价. 由引理1，T_{φ_1}与T_φ酉等价，故T_φ与T_ψ酉等价. 证毕.

定理4 设$\varphi,\psi\in H^\infty$且单叶，$S, T\in\mathscr{B}(H^2(D))$，$R(S)$，$R(T)$在$H^2(D)$中稠密，且$ST_\varphi=T_\psi S$，$TT_\psi=T_\varphi T$，则 range$\varphi$=range$\psi$.

证明 用反证法. 若不然，range$\varphi\neq$rangeψ，不妨设range$\varphi\subset$rangeψ不真，则有$\bar{\lambda}_0\in D$使$\varphi(\bar{\lambda}_0)$不在rangeψ中，令$\widetilde{\varphi}(\lambda_0)=\overline{\varphi(\bar{\lambda}_0)}$.

因$\varphi\in H^\infty$，由〔6〕定理3.3，有多项式序列$\{P_n(z)\}$使$T_\varphi=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(T_z)$（强收敛）. 且对任意$\lambda\in D$，$\lim\limits_{n\to\infty}P_n(z)=\varphi(z)$. 令

$h_{\lambda_0}(z)=\frac{1}{1-\lambda_0 z}$，显然$h_{\lambda_0}(z)\in H^2(D)$，且$T_z^* h_{\lambda_0}(z)=\lambda_0 h_{\lambda_0}(z)$. 任取$f\in H^2(D)$，则 $(T_\varphi^* h_{\lambda_0},f)=\lim\limits_{n\to\infty}(\widetilde{P}_n(T_z^*)h_{\lambda_0},f)=\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{P}_n(\lambda_0)(h_{\lambda_0},f)=(\widetilde{\varphi}(\lambda_0)h_{\lambda_0},f)$，故$T_\varphi^* h_{\lambda_0}=\widetilde{\varphi}(\lambda_0)h_{\lambda_0}$，这说明$\widetilde{\varphi}(\lambda_0)=\sigma_p(T_\varphi^*)$. 这里$\sigma_p(T_\varphi^*)$表示$T_\varphi^*$的点谱. 因$R(T)$在$H^2(D)$中稠密，故$T^*$是一对一的，$T^* h_{\lambda_0}\neq 0$，由假设，

$$T_\psi^* T^* h_{\lambda_0}=T^* T_\varphi^* h_{\lambda_0}=\widetilde{\varphi}(\lambda_0)T^* h_{\lambda_0}.$$

这说明

$$\varphi(\lambda_0)\in\sigma_p(T_\psi^*). \qquad (*)$$

令$G(z)=\psi(z)-\psi(\bar{\lambda}_0)$，因为$\varphi(\bar{\lambda}_0)\notin$range$\psi$，故$G(z)$在D内无零点. 显然$G(z)\in H^\infty$且单叶. 设其典型分解为$G(z)=B(z)S(z)u(z)$，其中$B(z)$是Blaschke因子，$S(z)$是奇异内函数，$u(z)$为外函数. 因$G(z)$在D内无零点，故$B(z)$为常数，由$G(z)$之单叶性及〔3〕定理3.17，$S(z)$是一常数，故$G(z)$是一外函数. 由〔2〕定义6.19及命题6.21

$$\bigvee_{n=0}^{\infty}\{T_z^n G(z)\}=H^2(D),$$

所以

$$\bigvee_{n=0}^{\infty}(T_G z^n)=\bigvee_{n=0}^{\infty}\{T_z^n G(z)\}=H^2(D)$$

这说明$R(T_G)$在$H^2(D)$中稠密，故$0\notin\sigma_p(T_G^*)$，而

$$T_G^* = (T_{\psi-\varphi(\lambda_0)})^* = T_\psi^* - \widetilde{\varphi}(\lambda_0) I$$

故

$$\widetilde{\varphi}(\lambda_0) \in \sigma_p(T_\psi^*)$$

这与（*）式矛盾．证毕．

定理 3 中的T_φ，T_ψ的单叶性条件是不可取消的，见面的例子：

取$\varphi = z$，$\psi = z^2$，则rangeφ = rangeψ，但kerT_φ^*是一维的，而kerT_ψ^*是二维的，故由引理 2，无稠值域算子 S，T使

$$ST_\phi = T_\psi S, \quad TT_\psi = T_\psi T.$$

定义 称算子$X \in \mathscr{B}(H)$为拟仿射，若kerX^*=ker$X = \{0\}$．若A，$B \in \mathscr{B}(H)$有拟仿射X，使$XA = BX$，$YB = AY$，则称A，B拟相似．

推论 5 若φ，$\psi \in H^\infty$且单叶，则下列条件等价：

（i）有稠值域算子S，T使

$$ST_\varphi = T_\psi S, \quad TT_\psi = T_\psi T;$$

（ii）T_φ与T_ψ拟相似；

（iii）T_φ与T_ψ酉等价；

（iv）rangeφ = rangeψ．

证明 由定理 3，（iv）⇒（iii）．而（iii）⇒（ii），（ii）⇒（i）显然．由定理 4，（i）⇒（iv）．证毕．

本文是在吉林大学王振鹏副教授指导下完成的．谨此致谢！

参 考 文 献

〔1〕E. Berkson and L. A. Rubel, Math. Ann., 204 (1973) 57—63.

〔2〕R. G. Douglas, Banach Algebra Techiques in Operators Theory, Academic press, New York and London, 1972.

〔3〕P. L. Duren, Theory of H' Space, Academic Press, New York, 1970.

〔4〕T. V. Hoover, Quasisimilarity of Operators, Illinois J. Math., 16 (1972), 678—686.

〔6〕H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant Subspaces, Springe Verlag, New York (1973).

〔7〕W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mcgraw-Hill, New York, 1966.

〔8〕S_2.-Nagy and C. Foias, Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, Company-Amsterdam, London, 1970.