关于Ekeland—Caristi定理的一点注记*

秦成林
（兰州大学数力系）

1．引言　为适应讨论映象满射性等问题的需要，W. O. Ray和A. M. Walker在〔1〕中对Ekeland—Caristi定理作了新的推广，获得如下的结果：

定理1.1　设（M，d）为完备距离空间，φ：M→〔0，∞）下半连续，C：〔0，∞）→〔0，∞）连续，不增，且$\int_0^\infty C(s)\mathrm{d}s=\infty$．$x_0\in$M为某一固定点．若映象$g$：M→M满足

$$C(d(x,x_0))d(x,g(x))\leqslant\varphi(x)-\varphi(g(x)),\quad x\in \mathrm{M}\ ,\tag{1.1}$$

则g在M中有不动点．

注　当$C(s)\equiv1$时，定理1.1即Ekeland－Caristi定理．

本文引进“关于距离的优函数”的概念，将定理1.1作了进一步的推广，并举例说明了应用．

2．予备　**定义2.1**　设D：X×X→〔0，∞），若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$N\leqslant n\leqslant m$时，$D(x_m, x_m)<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$为D—Cauchy列．

称D为关于距离d的一个优函数，即满足如下条件：（i）$D(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$；（ii）（ii）$D(x,y)\leqslant D(x,z)+D(z,y)$；（iii）$D$关于第二变元连续；（iv）若$\{x_n\}$为D—Cauchy列，则存在子列$\{x_{n_k}\}$为$d$—Cauchy列．

引理2.2　设（M，d）及函数C、固定点x_0如定理1.1所述，则

$$D(x,y)=\int_{d(x,x_0)}^{d(x,x_0)+d(x,y)}C(s)\mathrm{d}s\quad,\ x,y\in\mathrm{M}$$

是关于d的一个优函数．

证明　（i）显然$D(x,x)=0$；若$D(x,y)=0$，因$C(s)$不增，$\int_0^\infty C(s)\mathrm{d}s=\infty$，故$C(s)>0$，从而有$d(x,y)=0$，$x=y$；

（ii）
$$D(x,y)=\int_{d(x,x_0)}^{d(x,x_0)+d(x,z)}C(s)\mathrm{d}s+\int_{d(x,x_0)+d(x,z)}^{d(x,x_0)+d(x,y)}C(s)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant D(x,z)+\int_{d(x,x_0)+d(x,z)}^{d(x,x_0)+d(x,z)+d(z,y)}C(s)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant D(x,z)+\int_{d(z,x_0)}^{d(z,x_0)+d(z,y)}C(s)\mathrm{d}s=D(x,z)+D(z,y)$$

（iii）显然$D(x,y)$关于y连续；

* 1984年5月26日收到．中国科学院科学基金资助的课题．

（iv）设 $\{x_n\}$ 为D—Cauchy列，则 $\{d(x_0, x_n)\}$ 有界．否则，设$d(x_0, x_{n_k})\to+\infty$ $(k\to\infty)$，则对于任意的x_{n_m}，由$d(x_{n_m}, x_{n_k})\geqslant d(x_0, x_{n_k})-d(x_0, x_{n_m})\to\infty$ $(k\to\infty)$，可得$D(x_{n_m}, x_{n_k})\to\infty$ $(k\to\infty)$，此与 $\{x_n\}$ 为D—Cauchy列矛盾．故可设有$R_0>0$，使$d(x_0, x_n)\leqslant R_0$ $(n=1,2,\cdots)$，则$d(x_n, x_0)+d(x_n, x_m)\leqslant 3R_0$．由$C(s)$ 不增得

$$D(x_n, x_m)=\int_{d(x_n,x_0)}^{d(x_n,x_0)+d(x_n,x_m)}C(s)\mathrm{d}s\geqslant C(3R_0)d(x_n, x_m)$$

于是 $\{x_n\}$ 是d—Cauchy列．　∎

设X为Banach空间，$\Omega\subset X$为开集，称映象$F:\Omega\to X$为半紧的（见〔3〕），即当 $\{x_n\}\subset\Omega$有界且 $\{x_n-Fx_n\}$ 收敛时，$\{x_n\}$ 必有子列 $\{x_{n_j}\}$ 收敛．

称$P:X\to X$为模强制的，即 $\|Px\|\to\infty$ $(\|x\|\to\infty)$．

引理2.3　设X为Banach空间，$a:X\times X\to[0, \infty)$ 满足优函数定义的条件（i）—（iii）．$F:X\to X$半紧且连续．$P:X\to X$有闭的图象且模强制，在X中引进距离

$$\rho(x, y)=\|x-y\|+\|Px-Py\|,\quad x, y\in X$$

则

$$D(x,y)=a(x,y)+\|(x-Fx)-(y-Fy)\|+\|Px-Py\|$$

在（X，ρ）上是关于ρ的一个优函数．

证明　关于优函数定义的条件（i）-（ii）显然满足．下证（iii）．由于$x_n\xrightarrow{\rho}x\Rightarrow$在X的范数下，$x_n\to x$，$Px_n\to Px$，故$D(x,y)$ 关于两个变元皆连续．最后证（iv）．设 $\{x_n\}$ 为D—Cauchy列，则 $\{Px_n\}$ 为X中依范的Cauchy列，从而有界，由于P模强制，故 $\{x_n\}$ 在X中依范有界．由于 $\{x_n-Fx_n\}$ 在X中依范收敛，故由F的半紧性，有子列 $\{x_{n_j}\}$ 在X中依范收敛，从而 $\{x_{n_j}\}$ 为ρ—Cauchy列．　∎

注　若$f:X\to R^+=[0, +\infty)$ 为连续的次可加泛函，

即　$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$，　又有　$f^{-1}(0)=\{0\}$，则

$a(x, y)=f(x-y)$，　$x, y\in X$

满足优函数定义的条件（i）-（iii）．

引理2.4（H. Brezis 和 F. E. Browder〔2〕）设（E,d,$\leqslant$）为半序（见〔4〕）距离空间，$\varphi:E\to R^+$为某函数，假定以下条件满足：

（a）对每个$x\in E$，$S(x)=\{y\in E, x\leqslant y\}$ 闭；

（b）若$x\leqslant y$，$x\neq y$，则$\varphi(y)<\varphi(x)$，；

（c）E中的任何不减序列相对紧．

则存在$x_0\in E$，使$S(x_0)=\{x_0\}$．

3．主要结果

定理3.1　设（E，d）为完备距离空间，$\varphi:E\to R^+$下半连续，$D:E\times E\to[0, \infty)$ 为关于d的一个优函数，映象$g:E\to E$满足

$$D(x, g(x))\leqslant\varphi(x)-\varphi(g(x)),\quad x\in E.\tag{3.1}$$

则g在E中有不动点．

证明　在E中定义序$\leqslant$为：$x\leqslant y\Leftrightarrow D(x, y)\leqslant\varphi(x)-\varphi(y)$．下证在E中存在$x_0$，使$S(x_0)=\{x_0\}$．这只须逐条验证引理2.4的条件：

（a）$\forall x\in E$，若$x\leqslant y_n$，$y_n\to y_\infty$，因D关于第二变元连续，φ下半连续，故由$D(x,y_n)\leqslant\varphi(x)-\varphi(y_n)$ 得$D(x, y_\infty)\leqslant\varphi(x)-\varphi(y_\infty)$，即$x\leqslant y_\infty$，$y_\infty\in S(x)$，从而$S(x)$ 闭；

（b）若$x\leqslant y$，则$D(x,y)\leqslant\varphi(x)-\varphi(y)$，故$\varphi(y)\leqslant\varphi(x)$．若又有$x\neq y$，则$\varphi(y)<\varphi(x)$，否则$\varphi(y)=\varphi(x)\Rightarrow D(x,\ y)=0\Rightarrow x=y$；

（c）设$\{x_n\}\subset$E，$x_n\leqslant x_{n+1}$，则$0\leqslant\varphi(x_{n+1})\leqslant\varphi(x_n)$，从而$\{\varphi(x_n)\}$收敛于某个非负数$r$，故$\{\varphi(x_n)\}$为Cauchy列．由$D$的定义中条件（ii）得，当$n\leqslant m$时，$D(x_n,x_m)\leqslant\varphi(x_n)-\varphi(x_m)$，故$\{x_n\}$为D-Cauchy列．又由优函数定义中条件（iv），存在$\{x_{n_k}\}$为d-Cauchy列．

由引理2.4，存在$x_0\in$E，使$S(x_0)=\{x_0\}$，但由条件（3.1）有$D(x_0,\ g(x_0))\leqslant\varphi(x_0)-\varphi(g(x_0))$，即$x_0\leqslant g(x_0)$，故$x_0=g(x_0)$．　█

4．应用　例1　定理1.1的证明：由于$C(s)$不增，故有

$$D(x,y)=\int_{d(x,x_0)}^{d(x,x_0)+d(x,y)}C(s)\mathrm{d}s\leqslant C(d(x,x_0))d(x,y)$$

由条件（1.1）有

$$D(x,g(x))\leqslant C(d(x,x_0))d(x,g(x))\leqslant\varphi(x)-\varphi(g(x))$$

由引理2.2，$D(x,y)$为关于距离d的优函数，再由定理3.1，g在M中有不动点．　█

例2　设X为Banach空间，映象P: X→X有闭的图象，连续映象F: X→X半紧，a: X×X→R^+满足优函数定义的条件（i）-（iii），B: $\mathrm{R}^+\times\mathrm{R}^+\times\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+$连续．设如下条件满足：

（1）P模强制；

（2）$\forall x,y\in$X，$\exists\ 0<\varepsilon\leqslant 1$及$z=x+\varepsilon(y-x)$，使

$a(x,z)+\|(x-Fx)-(z-Fz)\|\leqslant B(\|x\|,\|z\|,\|Px-Pz\|)\|Px-Pz\|$；

（3）P在X上线性Gâteaux可微（见〔4〕），导算子为P_x，其共轭算子P_x^*闭且零子空间$\mathrm{Ker}\,P_x^*=\{0\}$．

则$P(\mathrm{X})=$X．

证明　若$\exists w\in$X，$w\notin P(\mathrm{X})$．则$\forall x\in$X，$Px-w\neq 0$．由于$\overline{\mathrm{R}(P_x)}=(\mathrm{Ker}\,P_x^*)^\perp=\{0\}^\perp=$X，其中$\mathrm{R}(P_x)$表示$P_x$的象，故$\exists h_n\in$X，使$P_xh_n+(Px-w)\to 0\ (n\to\infty)$．取定

$$h=h_N\neq 0,\ 使\ \|P_xh+(Px-w)\|\leqslant\frac{1}{4}\|Px-w\| \tag{4.1}$$

由于P在X中Gateaux可微，故存在$\delta>0$，当$0<\varepsilon<\delta$时，

$$\|P(x+\varepsilon h)-Px-\varepsilon P_xh\|\leqslant\frac{1}{4}\varepsilon\|Px-w\|\ . \tag{4.2}$$

令$y=x+\varepsilon h$，由条件（2），$\exists\ 0<\varepsilon'\leqslant 1$及$\bar{x}=x+\varepsilon'(y-x)=x+\varepsilon'\varepsilon h$，使

$$a(x,\bar{x})+\|(x-Fx)-(\bar{x}-F\bar{x})\|\leqslant B(\|x\|,\|\bar{x}\|,\|Px-P\bar{x}\|)\|Px-P\bar{x}\|. \tag{4.3}$$

记$\bar{\varepsilon}=\varepsilon'\varepsilon$，则$0<\bar{\varepsilon}<\delta$，故（4.2）为

$$\|P\bar{x}-Px-\bar{\varepsilon}P_xh\|\leqslant\frac{1}{4}\bar{\varepsilon}\|Px-w\|\ . \tag{4.4}$$

由（4.1）与（4.4）得

$$\begin{aligned}\|(P\bar{x}-w)-(1-\bar{\varepsilon})(Px-w)\|&\leqslant\|P\bar{x}-Px-\bar{\varepsilon}P_xh\|+\bar{\varepsilon}\|P_xh+(Px-w)\|\\&\leqslant\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\|Px-w\|\ .\end{aligned} \tag{4.5}$$

由（4.5）可得　$$\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\|Px-w\|\leqslant\|Px-w\|-\|P\bar{x}-w\| \tag{4.6}$$

以及 $\| P\bar{x} - Px \| \leqslant \frac{3}{2}\bar{\varepsilon} \| Px - w \|$.

再由（4.6）得 $$\| P\bar{x} - Px \| \leqslant 3(\| Px - w \| - \| P\bar{x} - w \|), \tag{4.7}$$

由（4.3）及（4.7）得 $$\begin{aligned} &a(x, \bar{x}) + \| (x - Fx) - (\bar{x} - F\bar{x}) \| + \| P\bar{x} - Px \| \\ &\leqslant 3[B(\| x \|, \| \bar{x} \|, \| Px - P\bar{x} \|) + 1](\| Px - w \| - \| P\bar{x} - w \|). \end{aligned} \tag{4.8}$$

在X中引进距离

$$\rho(x, y) = \| x - y \| + \| Px - Py \| , \quad x, y \in X$$

由于 P 有闭的图象，故（X，ρ）完备.

令 $M = \{x \in X, \| Px - w \| \leqslant C_0\}$. 其中 $C_0 = \| P(0) - w \| > 0$. 故 $M \neq \phi$，且M在（X，ρ）中闭，从而（M，ρ）完备.

由于 $\| Px \| \to \infty$ $(\| x \| \to \infty)$，故M依范有界，所以存在 $m > 0$，使 $\| x \| \leqslant m$，$x \in M$. 另外，当 $x, \bar{x} \in M$ 时，$\| Px - P\bar{x} \| \leqslant \| Px - w \| + \| P\bar{x} - w \| \leqslant 2C_0$. 因 $B: R^+ \times R^+ \times R^+ \to R^+$ 连续，可设 $\max\{B(s, t, \tau) \mid 0 \leqslant s, t \leqslant m, \ 0 \leqslant \tau \leqslant 2C_0\} = B_0$. 故当 $x, \bar{x} \in M$ 时，有

$$a(x, \bar{x}) + \| (x - Fx) - (\bar{x} - F\bar{x}) \| + \| Px - P\bar{x} \| \leqslant 3(B_0 + 1)(\| Px - w \| - \| P\bar{x} - w \|) \tag{4.9}$$

令 $g: M \to X$ 为 $g(x) = \bar{x}$. 由（4.9）知 $\| P\bar{x} - w \| \leqslant \| Px - w \|$，故 $g: M \to M$. 令 $\varphi(x) = 3(B_0 + 1)\| Px - w \|$，记 $D(x, y) = a(x, y) + \| (x - Fx) - (y - Fy) \| + \| Px - Py \|$，由（4.9）得 $$D(x, g(x)) \leqslant \varphi(x) - \varphi(g(x)) \quad . \quad x \in M$$

由引理2.3知，$D(x, y)$ 为关于 ρ 的优函数，由 ρ 的定义知，φ 连续. 由定理3.1，存在 $x \in M$，使 $x = g(x) = x + \bar{\varepsilon}h$. 矛盾. ∎

最后借此对陈文嵘教授及同事范先令表示感谢，他们对本工作作过有益的建议.

参 考 文 献

〔1〕Ray, W. O., and Walker, A. M., Mapping theorems Gâteaux differentiable and accretive operators, Nonl, Anal., Vol. 6, No.5 423—433 (1982).

〔2〕Brézis, H. and Browder, F. E., A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis, Adv. in Math., 21(1976), pp.355—364.

〔3〕Petryshyn, W.V., Construction of fixed point of demicompact mappings in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl., 14(1966), pp.276—284.

〔4〕陈文嵘，非线性泛函分析，甘肃人民出版社，1982.

A Note on Ekeland-Caristi's Theorem

Qin Chenglin（秦成林）

Abstract

In this note we give a genera lization of the Ekeland-Caristi's theorem, which include the recent result of Ray and Walker.