二阶非线性泛函微分方程的渐近性与振动性*

李小军

（湖南大学）

§1　引　　言

本文讨论如下类型二阶泛函微分方程

$$(E)\qquad [r(t)x'(t)]'+\sum_{1}^{m}f_i(t,\ x(g_{i1}(t)),\ \cdots,\ x(g_{in}(t)))=0$$

解的渐近性与振动性.

假设 i）$r(t)$ 对$t\geqslant a$连续且为正；

ii）对一切$t\geqslant a$，有$g_{ij}(t)\geqslant t$（或$\leqslant t$），连续，且当$t\to\infty$时，趋于$+\infty$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$；

iii）$f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 连续，且当$x_1,x_2,\cdots,x_n$均同号时，f_i与它们同号，$i=1,2,\cdots,m$.

首先，我们引进一些定义：

定义1　称$f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$是超线性的，如果存在n个非负函数$\rho_i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$，且$\sum_{1}^{n}\rho_i(t)>0$，使得$x_i\geqslant y_i>0$（或$x_i\leqslant y_i<0$），$i=1,2,\cdots,n$时

$$\frac{f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\sum_{1}^{n}\rho_i(t)x_i}\geqslant\frac{f(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\sum_{1}^{n}\rho_i(t)y_i}\tag{1}$$

定义2　称$f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$是次线性的，如果定义1中的不等式（1）反号.

定义3　称$f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$是强超线性的，如果存在n个非负函数$\rho_i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$，且$\sum_{1}^{n}\rho_i(t)>0$. 又存在常数$\sigma>1$，使得当$x_i\geqslant y_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$时

$$\frac{f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\left[\sum_{1}^{n}\rho_i(t)x_i\right]^{\sigma}}\geqslant\frac{f(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\left[\sum_{1}^{n}\rho_i(t)y_i\right]^{\sigma}}\ ;\tag{2}$$

当$x_i\leqslant y_i<0$，$i=1,2,\cdots,n$时

$$\frac{-f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\left[-\sum_{1}^{n}\rho_i(t)x_i\right]^{\sigma}}\geqslant\frac{-f(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\left[-\sum_{1}^{n}\rho_i(t)y_i\right]^{\sigma}}\ .\tag{3}$$

* 1984年2月7日收到.

定义 4　称$f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是强次线性的，若定义 3 中的常数 $0<\sigma<1$，不等式（2）、（3）反号.

定义 5　称方程（E）的解$x(t)$ 是振动的，若$x(t)$ 将来存在，且$\sup\{t; x(t)\ 0\} = +\infty$.

若方程（E）的每一将来存在的解都是振动的，我们就说方程（E）振动.

H.Onose〔1,2〕讨论了（E）中$m=n=1$的情形，那是我们的特例．阮炯〔3〕讨论了$m=1$，$n=2$的情形，不过他的超线性与次线性定义欠佳，就是简单的线性情形都未包括，而且没有研究振动性.

文中使用记号：

$$R(t)=\int_a^t \frac{ds}{r(s)}, \qquad R(t, t_1)=\int_{t_1}^t \frac{ds}{r(s)}, \quad \rho(t)=\int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)},$$

$$f(t, x(g(t))) \triangleq \sum_1^m f_i(t, x(g_{i1}(t)), \cdots, x(g_{in}(t))).$$

§ 2　渐近性质类型及判别

引理 1　设$\int^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} = +\infty$. 若$x(t)$ 是（E）的最终正解，则存在正数T，C_1, C_2使

$$x'(t)>0, \quad C_1 \leqslant x(t) \leqslant C_2 R(t), \quad t \geqslant T.$$

引理 2　设$\int^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} < +\infty$. 若$x(t)$ 是（E）的最终正解，则存在正数T，C_1, C_2使

$$x(t) \geqslant -r(t)x'(t)\rho(t), \quad C_1\rho(t) \leqslant x(t) \leqslant C_2, \quad t \geqslant T.$$

注　若$x(t)$ 是（E）的最终负解，我们有类似引理1,2的结果，只要把C_1，C_2改为负数，不等式反号即可.

以上二引理容易证明,从略.利用这两个引理可以证明下面的两个定理.

定理 1　设$\int^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} = +\infty$. 方程（E）的非振动解的渐近性质有且仅有以下三种类型：

A_c^0型	$x(t) \to c \neq 0$,	$r(t)x'(t) \to 0$	$(t \to +\infty)$;
A_∞^c型	$x(t) \to \infty$,	$r(t)x'(t) \to c \neq 0$	$(t \to +\infty)$;
A_∞^0型	$x(t) \to \infty$,	$r(t)x'(t) \to 0$	$(t \to +\infty)$.

证明　由引理 1 及注，$x(t)$ 与$x'(t)$ 同号，所以$x(t)$ 的极限存在且不为零，故只有

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = c \neq 0 \quad 或 \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = \infty.$$

1）若$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = c$，不妨设$c>0$，那么最终有$x(t)>0$，$r(t)x'(t)>0$．由方程（E），$[r(t)x'(t)]' \leqslant 0$，即$r(t)x'(t)$ 非增，所以$\lim\limits_{t \to +\infty} r(t)x'(t)$ 存在．可以证明，必有$\lim\limits_{t \to +\infty} r(t)x'(t) = 0$．若不然，设$\lim\limits_{t \to +\infty} r(t)x'(t) = \tilde{c} > 0$，那么$r(t)x'(t) \geqslant \tilde{c}$．于是$x'(t) \geqslant \frac{\tilde{c}}{r(t)}$．两边积分得$x(t) \to +\infty$，与假设矛盾.

2）若$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \infty$，不妨设$x(t) \to +\infty$．因$\lim\limits_{t \to +\infty} r(t)x'(t)$ 存在，根据罗必塔法则，

$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x(t)}{R(t)}=\lim\limits_{t\to+\infty}r(t)x'(t)$．由引理 1，$0\leqslant\dfrac{x(t)}{R(t)}\leqslant c_2$，故只有

$$\lim_{t\to+\infty}r(t)x'(t)=c\neq 0,\text{或}\lim_{t\to+\infty}r(t)x'(t)=0\ . \qquad \blacksquare$$

定理 2 设$\int^{+\infty}\dfrac{ds}{r(s)}<+\infty$．方程（E）的非振动解的渐近性质有且仅有以下三种类型：

A_c型 $\quad x(t)\to c\neq 0 \qquad (t\to+\infty)$；

A_0^c型 $\quad x(t)\to 0$，$r(t)x'(t)\to c\neq 0 \qquad (t\to+\infty)$；

A_0^∞型 $\quad x(t)\to 0$，$r(t)x'(t)\to\infty \qquad (t\to+\infty)$．

证明类似定理 1．

接着，我们利用Shauder不动点原理证明了以下四个定理：

定理 3 设$\int^{+\infty}\dfrac{dt}{r(t)}=+\infty$，$f_i$，$i=1,2,\cdots,m$均为超（或次）线性．那么（E）有$A_c^0$型非振动解的充要条件为：对某一$c\neq 0$

$$\int^{+\infty}R(t)\left|\sum_1^m f_i(t,c,c,\cdots,c)\right|dt<\infty. \qquad (4)$$

定理 4 设定理 3 的条件成立．那么（E）有A_∞^c型非振动解的充要条件为：对某一$c\neq 0$

$$\int^{+\infty}\left|\sum_1^m f_i(t,cR(g_{i1}(t)),\cdots,cR(g_{in}(t)))\right|dt<\infty.$$

定理 5 设$\int^{+\infty}\dfrac{dt}{r(t)}<+\infty$，$f_i$，$i=1,2,\cdots,n$ 均为超（或次）线性．那么（E）有A_c型非振动解的充要条件为：对某一$c\neq 0$

$$\int^{+\infty}\rho(t)\left|\sum_1^m f_i(t,c,c,\cdots,c)dt<\infty\right. .$$

定理 6 设定理 5 的条件成立．那么（E）有A_0^c型非振动解的充要条件为：对某一$c\neq 0$．

$$\int^{+\infty}\left|\sum_1^m f_i(t,c\rho(g_{i1}(t)),\cdots,c\rho(g_{in}(t)))\right|dt<\infty.$$

这几个定理证明多少有点类似，我们给出定理 3 的证明．

定理 3 的证明 必要性．设$x(t)$ 是A_c^0型非振动解，可以假设$x(t)>0$．根据引理 1，存在正数t_1，c_1，c_2使得当$t\geqslant t_1$时$x'(t)>0$，$c_1\leqslant x(g_{ij}(t))\leqslant c_2$．

用$R(t)$ 乘以方程（E），再从t_1到 t 积分得

$$R(t)r(t)x'(t)-R(t_1)r(t_1)x'(t_1)-x(t)+r(t_1)$$

$$+\int_t^t R(s)f(s,x(g(s)))ds=0,$$

于是 $\quad\int_t^{+\infty}R(s)f(s,x(g(s)))ds<+\infty.$

故f超线性时，$\int_{t_1}^{+\infty}R(t)\sum_1^m f_i(t,c_1,c_1,\cdots,c_1)\mathrm{d}t<+\infty$；$f$次线性时，$\int_{t_1}^{+\infty}R(t)\sum_1^m f_i(t,c_2,c_2,\cdots,c_2)\mathrm{d}t<+\infty$.

充分性．设（4）中$c>0$．若f超线性，令$a=\frac{c}{2}$若f次线性，令$a=c$．选取$T>a$，充分大，使

$$\int_T^{+\infty}R(t)f(t,c)\mathrm{d}t<\frac{a}{2}.$$

考虑积分方程

$$x(t)=a+\int_T^t R(s)f(s,x(g(s)))\mathrm{d}s+R(t)\int_t^{+\infty}f(s,x(g(s)))\mathrm{d}s\quad. \tag{5}$$

显然（5）的解是方程（E）的解．

作Banach空间$CB[T,\infty)$，所有有界连续函数$x(t)$：$[T,\infty)\to\infty$，范数$\|x\|=\sup_{t\geq T}|x(t)|$．令$X=\{x\in CB[T,\infty)$；$a\leqslant x(t)\leqslant 2a$，$t\geqslant T\}$ 那么X是$CB[T,\infty)$中的有界凸闭集．

作算子ϕ：$X\to CB[T,\infty)$

$$(\phi x)(t)=a+\int_T^t R(s)f(s,x(g(s)))\mathrm{d}s+R(t)\int_t^{+\infty}f(s,x(g(s)))\mathrm{d}s,$$ 其中当$t\in[T,\infty)$，$g_{ij}(t)\leqslant T$时，令$x(g_{ij}(t))=x(T)$．利用Schander r不动点原理，可以证明算子ϕ在X中有不动点．所以(E)存在A_c^0型非振动解．

§3 振动性

定理7 设1）$\int^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}=+\infty$；2）$f_i$，$i=1,2,\cdots,m$均为强超线性；3）令

$$g(t)=\min\{t,g_{ij}(t);i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n\},\ \bar{g}'(t)\geqslant 0\ .$$

那么如果

$$\int^{+\infty}R(\bar{g}(t))\left|\sum_1^m f_i(t,c,c,\cdots,c)\right|\mathrm{d}t=+\infty,\ 对一切c\neq 0, \tag{6}$$

则方程（E）振动．

推论1 设定理7中的1）、2）成立，且3）$'g_{ij}(t)\geqslant t$，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$，那么方程（E）振动的充要条件为：对一切$c\neq 0$．

$$\int^{+\infty}R(t)\left|\sum_1^m f_i(t,c,c,\cdots,c)\right|\mathrm{d}t=+\infty.$$

此推论可由定理3、7得到．

定理7的证明 令σ为诸f_i公共的强超线性常数．若定理不真，则（E）有非振动解$x(t)$，不妨设$x(t)>0$．由引理1，存在t_1，使$x'(t)>0$，$t\geqslant t_1$．把（E）从t到T积分（$t_1\leqslant t<T$）得

$$r(T)x'(T)-r(t)x'(t)+\int_t^T f(s,x(g(s)))\mathrm{d}s=0\ .$$

由此推出，$r(t)x'(t)\geqslant\int_t^T f(s, x(g(s)))\mathrm{d}s$. 令$T\to\infty$，得

$$r(t)x'(t)\geqslant\int_t^{+\infty} f(s, x(g(s)))\mathrm{d}s \quad . \tag{7}$$

于是 $\quad r(\bar{g}(t))x'(\bar{g}(t))\geqslant\int_t^{+\infty} f(s, x(g(s)))\mathrm{d}s,$

$$x'(\bar{g}(t))\bar{g}'(t)\geqslant\frac{\bar{g}'(t)}{r(\bar{g}(t))}\int_t^{+\infty} f(s, x(g(s)))\mathrm{d}s.$$

再从t_1到t积分得

$$x(\bar{g}(t))\geqslant\int_t^t R(\bar{g}(s), \bar{g}(t_1))f(s, x(g(s)))\mathrm{d}s.$$

又因为存在$K>0$，使$x(\bar{g}(t))\geqslant K$，$t\geqslant t_1$及强超线性，我们有

$$f(t, x(g(t)))\geqslant K^{-\sigma}x^{\sigma}(\bar{g}(t))f(t, K).$$

所以，$\quad x(\bar{g}(t))\geqslant k^{-\sigma}\int_t^t R(\bar{g}(s), \bar{g}(t_1))x^{\sigma}(\bar{g}(s))f(s, K)\mathrm{d}s,$

$$[x(\bar{g}(t))]^{-\sigma}\leqslant K^{\sigma^2}\left[\int_t^t R(\bar{g}(s),\bar{g}(t_1))x^{\sigma}(\bar{g}(s))f(s, K)\mathrm{d}s\right]^{-\sigma} .$$

用$R(\bar{g}(t), \bar{g}(t_1))f(t, K)x^{\sigma}(\bar{g}(t))$ 乘上式，再从t_2到t积分（$t_2>t_1$）得

$$\int_t^t R(\bar{g}(s),g(t_1))f(s,K)\mathrm{d}s\leqslant\frac{K^{\sigma^2}}{\sigma-1}\left[\int_t^u R(\bar{g}(s),\bar{g}(t_1))x^{\sigma}(\bar{g}(s))f(s, K)\mathrm{d}s\right]^{1-\sigma}\Big|_t^{t_2} .$$

所以 $\int_t^{+\infty}R(\bar{g}(s),\bar{g}(t_1))f(s, K)ds<+\infty$. 结合（7）式，得$\int_t^{+\infty}R(\bar{g}(s))f(s,K)\mathrm{d}s<+\infty$.

此式与（6）矛盾，定理得证.

类似地可证下面的定理（从略）.

定理 8 设 1）$\int^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{r(s)}<+\infty$；2）$f_i$，$i=1,2,\cdots,m$均为强超线性. 令$G_{ij}(t)=\max\{t, g_{ij}(t)\}$，$i=1,2,\dots m$，$j=1,2,\cdots,n$. 那么如果对一切$c\neq0$

$\int^{+\infty}\left|\sum_1^m f_i(t, c\rho(G_{ij}(t)),\cdots,c\rho(G_{in}(t)))\right|\mathrm{d}t=+\infty$，则方程（E）振动.

推论 2 设定理 8 中的 1）、2)成立，且 3）$g_{ij}(t)\geqslant t$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$. 那么方程（E）振动的充要条件为：对一切$c\neq0$

$$\int^{+\infty}\left|\sum_1^m f_j(t, c\rho(g_{i1}(t)),\cdots,c\rho(g_{in}(t)))\right|\mathrm{d}t=+\infty.$$

定理 9 设 1）$\int^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}=+\infty$；2）$f_i$，$i=1,2,\cdots,m$均为强次线性；3）$g_{ij}(t)\leqslant t$，$i=1,3,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$. 那么方程（E）振动的充要条件为：对一切$c\neq0$.

$$\int^{+\infty}\left|\sum_1^m f_i(t, cR(g_{i1}(t)),\cdots,cR(g_{in}(t)))\right|\mathrm{d}t=+\infty.$$

定理10 设 1）$\int^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{r(t)}<+\infty$；2）$f_i$，$i=1,2,\cdots,m$均为强次线性；3）令$\overline{G}(t)=$ $=\max\{t,\ g_{ij}(t);\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n\}$，$\overline{G}'(t)\geqslant 0$．那么如果对一切$c\neq 0$

$$\int^{+\infty}\rho(G(t))\left|\sum_1^m f_i(t,c,c,\cdots,c)\right|\mathrm{d}t=+\infty,$$ 则方程（E）振动.

推论3 设定理10中的条件1）、2）成立，3）′ $g_{ij}(t)\leqslant t$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$．那么方程（E）振动的充要条件为：对一切$c\neq 0$

$$\int^{+\infty}\rho(t)\left|\sum_1^m f_i(t,c,c,\cdots,c)\right|\mathrm{d}t=+\infty.$$

参考文献

〔1〕T. Kusano and H. Onose, Nonlinear oscillation of second order functional differential equations With advanced argument, J.Math.Soc. Japan, Vol. 29, No.3, 1977.

〔2〕H. Onose, Nonlinear oscillation of functional differential equations with complicated deviating argument, Bull, Fac. Sci, Ibaraki Univ., Math., 13(1981).

〔3〕阮炯，二阶非线性泛函微分方程的渐近性，复旦大学学报（自然科学版），Vol. 22, 3(1983).