一类三阶非线性微分方程边值问题解的存在性*

赵 为 礼
（吉林大学数学系）

提要　本文讨论了一类三阶非线性微分方程

$$y''' = h(x, y)$$

之逐一满足如下条件

$$y(a)=\alpha,\ \ y''(a)=\beta,\ \ y^{(i)}(b)=\gamma \qquad (i=0,1);$$
$$y(a)=\alpha,\ \ y'(a)=\beta,\ \ y^{(i)}(b)=\gamma \qquad (i=1,2);$$
$$y(a)=\alpha,\ \ y^{(i)}(b)=\beta,\ y''(b)=\gamma \qquad (i=0,1);$$
$$y'(a)=\alpha,\ \ y(b)=\beta,\ \ y^{(i)}(b)=\gamma \qquad (i=1,2);$$
$$y^{(i)}(a)=\alpha,\ \ y(b)=\beta,\ \ y'(b)=\gamma \qquad (i=0,2);$$
$$y'(a)=\alpha,\ \ y''(a)=\beta,\ \ y(b)=\gamma$$

与

$$y^{(j)}(a)=\alpha,\ \ y(b)=\beta,\ \ y^{(k)}(c)=\gamma$$

（$j,k\in\{0,1,2\},(j,k)\notin\{(0,0),(2,2)\}$）的两点与三点边值问题解的存在性（上述诸式中 $a<b<c,\alpha,\beta,\gamma$ 皆为常数），给出了上述诸边值问题有解的充分必要条件．本文是文献〔1〕的推广．

一　引言　文献〔1〕曾讨论了一类三阶非线性微分方程

$$y''' = h(x, y) \tag{1}$$

之满足条件

$$y(a)=\alpha,\ \ y'(a)=\beta,\ \ y(b)=\gamma\ \ (a<b)\ \text{或}\ y(a)=\alpha,\ \ y(b)=\beta,\ \ y(c)=\gamma\ \ (a<b<c)$$

（其中$a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$皆为常数）的两点或三点边值问题解的存在性．基于文〔1〕，本文首先证明了方程（1）之满足在本文中具有代表性的两点边界条件

$$y(a)=\alpha,\ \ y''(a)=\beta,\ \ y'(b)=\gamma \tag{2}$$

的边值问题有解的充要条件．仿此，便不难证明方程（1）之逐一满足如下条件

$$y(a)=\alpha,\ \ y'(a)=\beta,\ \ y''(b)=\gamma\ ; \tag{3}$$
$$y(a)=\alpha,\ \ y'(a)=\beta,\ \ y'(b)=\gamma\ ; \tag{4}$$
$$y(a)=\alpha,\ \ y'(b)=\beta,\ \ y''(b)=\gamma\ ; \tag{5}$$
$$y(a)=\alpha,\ \ y''(a)=\beta,\ \ y(b)=\gamma \tag{6}$$

的两点边值问题有解的充要条件．利用这些结果并借助于适当变换，即可给出方程（1）之逐一满足如下条件

$$y'(a)=\alpha,\ \ y(b)=\beta,\ \ y''(b)=\gamma\ ; \tag{7}$$

* 1983年 4 月18日收到．

$$y''(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\quad y'(b)=\gamma; \tag{8}$$
$$y'(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\quad y'(b)=\gamma; \tag{9}$$
$$y'(a)=\alpha,\quad y''(a)=\beta,\quad y(b)=\gamma; \tag{10}$$
$$y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\quad y''(b)=\gamma\ ; \tag{11}$$
$$y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\quad y'(b)=\gamma \tag{12}$$

的两点边值问题有解的充要条件．

其次，将上述边值问题（1）、（2）之解的存在性的论证方法加以适当变通，便不难证明方程（1）之逐一满足如下条件

$$y'(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\quad y''(c)=\gamma; \tag{13}$$
$$y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\quad y''(c)=\gamma; \tag{14}$$
$$y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\quad y'(c)=\gamma; \tag{15}$$
$$y'(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\quad y'(c)=\gamma \tag{16}$$

的三点边值问题有解的充要条件．根据这些结果并通过适当变换，便可给出方程（1）之逐一满足如下条件

$$y''(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\quad y'(c)=\gamma; \tag{17}$$
$$y''(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\quad y(c)=\gamma; \tag{18}$$
$$y'(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\quad y(c)=\gamma \tag{19}$$

的三点边值问题有解的充要条件．

二　两点边值问题　本节将始终假定函数$h(x,y)$在区域

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ -\infty<y<\infty\}$$

上连续．

借助文〔2〕对一般三阶非线性微分方程所引进的上解与下解的概念，文〔1〕对于方程（1）引进了如下的

定义　若存在$\overline{\omega}(x)\in C^3[a,b]$，使得

$$\overline{\omega}'''(x)\le h(x,\overline{\omega}(x))\qquad(a\le x\le b),$$

则称$\overline{\omega}(x)$为方程（1）于〔a,b〕上的上解；若存在$\underline{\omega}(x)\in c^3[a,b]$，使得

$$\underline{\omega}'''(x)\ge h(x,\underline{\omega}(x))\qquad(a\le x\le b),$$

则称$\underline{\omega}(x)$为方程（1）于〔a,b〕上的下解．

引理1　若存在$M>0$，使得当$(x,y)\in D$时，$|h(x,y)|\le M$，则边值问题（1）、(k)（$k=2,3,4,5,6$）有解．

证明　这里仅就$k=2$的情形证明（余者，证法类似．从略）．不难求出边值问题

$$\begin{cases} y'''=0,\\ y(a)=0,\quad y''(a)=0,\quad y'(a)=0\end{cases}$$

的Green函数为 $G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-\xi)^2+(\xi-b)(x-a), & \xi\le x,\\ (x-b)(x-a), & \xi>x.\end{cases}$ 其中$\xi\in(a,b)$是参数．

记$R=\frac{2}{3}M(b-a)^3+\frac{3}{2}|\beta|(b-a)^2+|\gamma|(b-a)+|\alpha|$．则容易证明．由

$$T[y(x)]=\int_a^b G(x,\xi)h(\xi,y(\xi))\mathrm{d}\xi+\frac{\beta}{2}(x-a)^2+[\gamma-\beta(b-a)](x-a)+a$$

所确定的把Banach空间 $C[a,b]$ 内的有界凸闭集

$$J[a,b]=\{y(x)\mid y(x)\in C[a,b],\ |y(x)|\leq R\}$$

映到其自身的算子T是全连续算子．根据Schauder不动点定理可知，算子T在集$J[a,b]$内有不动点．不难看出，此不动点就是边值问题（1）、（2）的解．

定理1 设$h(x,y)$在区域D上关于y为不增函数，则边值问题（1）、（2）有解的充要条件是存在方程（1）于$[a,b]$上的上解$\overline{\omega}(x)$与下解$\underline{\omega}(x)$，使得

$$\underline{\omega}(x)\leq\overline{\omega}(x)\qquad(a\leq x\leq b);$$
$$\underline{\omega}(a)\leq a\leq\overline{\omega}(a),\ \overline{\omega}''(a)\leq\beta\leq\underline{\omega}''(a),\ \underline{\omega}'(b)\leq\gamma\leq\overline{\omega}'(b)\tag{20}$$

此外，若上述充分条件成立，则边值问题（1）、（2）存在解$y=y(x)$，满足不等式

$$\underline{\omega}(x)\leq y(x)\leq\overline{\omega}(x)\qquad(a\leq x\leq b).\tag{21}$$

证明 必要性显然．事实上，若$y=y(x)$是边值问题（1）、（2）的解，则只须取

$$\underline{\omega}(x)=\overline{\omega}(x)=y(x)\qquad(a\leq x\leq b).$$

下面证明充分性．我们分两种情形来讨论：

1° $\underline{\omega}(a)=\overline{\omega}(a)$，$\underline{\omega}'(a)=\overline{\omega}'(a)$，$\underline{\omega}''(a)=\overline{\omega}''(a)$.

根据$h(x,y)$关于y的不增性易见，当$a\leq x\leq b$时，

$$\overline{\omega}(x)-\underline{\omega}(x)\leq\int_a^x\mathrm{d}s\int_a^s\mathrm{d}\tau\int_a^\tau[h(t,\overline{\omega}(t))-h(t,\underline{\omega}(t))]\mathrm{d}t\leq 0.$$

再按假设条件可知，$\underline{\omega}(x)=\overline{\omega}(x)$ $(a\leq x\leq b)$．于是，$y=\overline{\omega}(x)$便是边值问题（1）、（2）之满足不等式（21）的解．

2° 若非情形1°，记

$$H(x,y)=\begin{cases}h(x,\overline{\omega}(x))+\dfrac{y-\overline{\omega}(x)}{1+y-\overline{\omega}(x)}, & \text{当}a\leq x\leq b,\ y>\overline{\omega}(x)\text{时},\\ h(x,y), & \text{当}a\leq x\leq b,\ \underline{\omega}(x)\leq y\leq\overline{\omega}(x)\text{时},\\ h(x,\underline{\omega}(x))-\dfrac{\underline{\omega}(x)-y}{1+\underline{\omega}(x)-y}, & \text{当}a\leq x\leq b,\ y<\underline{\omega}(x)\text{时},\end{cases}$$

则根据引理1，边值问题

$$\begin{cases}y'''=H(x,y),\\ y(a)=a,\ y''(a)=\beta,\ y'(b)=\gamma\end{cases}$$

有解$y=y(x)$．显而易见，若

$$\underline{\omega}(x)\leq y(x)\leq\overline{\omega}(x)\qquad(a\leq x\leq b),\tag{22}$$

则$y=y(x)$便是（1）、（2）之满足不等式（21）的解．下面来证明（22）式成立．用反证法．若不然，则不难证明必存在$\xi\in(a,b]$，能使

$$y(\xi)>\overline{\omega}(\xi),\ y(x)\geq\underline{\omega}(x)\ (a\leq x\leq\xi),\tag{23}$$

或

$$y(\xi)<\underline{\omega}(\xi),\ y(x)\leq\overline{\omega}(x)\quad(a\leq x\leq\xi).\tag{24}$$

事实上，若非$\underline{\omega}(a)=\overline{\omega}(a)$与$\underline{\omega}'(a)=\overline{\omega}'(a)=y'(a)$，则（23）或（24）式显然成立；若$\underline{\omega}(a)=\overline{\omega}(a)$，$\underline{\omega}'(a)=\overline{\omega}'(a)=y'(a)$，则注意到此时$\overline{\omega}''(a)\neq\underline{\omega}''(a)$，根据Taylor展开定理立见（23）或（24）式也成立．为确定计，不妨设（23）式成立（若（24）式成立，则证明类似）．取$\eta\in(a,\xi]$，使得$y'(\eta)-\overline{\omega}'(\eta)>0$，令

$\alpha_0=\sup\{x\mid y'(x)-\overline{\omega}'(x)<0,\ a\leq x<\eta\}$，$\beta_0=\inf\{x\mid y'(x)-\overline{\omega}'(x)\leq 0,\ \eta<x\leq b\}$；

若 $\{x\mid y'(x)-\overline{\omega}'(x)\leq 0,\ a\leq x<\eta\}=\phi$，则规定 $\alpha_0=a$．设 x_0 是函数 $y'(x)-\overline{\omega}'(x)$ 于 $[a,\beta_0]$ 上的最大值点．则由（25）式及 $y'(b)-\overline{\omega}'(b)\leq 0$ 易见 $x_0<\beta_0$．若 $x_0>\alpha_0$，则显然有

$$y''(x_0)-\overline{\omega}''(x_0)=0, \tag{26}$$

$$y'''(x_0)-\overline{\omega}'''(x_0)\leq 0; \tag{27}$$

若 $x_0=a$，则按规定知 $x_0=a$．于是存在数列 $\{x_n\}$，$x_n\neq a\,(n=1,2,\cdots)$，$x_n\downarrow a\,(n\to\infty)$，使得

$$y''(x_n)-\overline{\omega}''(x_n)\leq 0\quad(n=1,2,\cdots).$$

据此及 $y''(a)\geq\overline{\omega}''(a)$ 可见（26）式成立．从而（27）式成立．

如果 $x_0\geq\xi$，则由 $\xi\geq\eta$ 及（23）式知 $y(x_0)>\overline{\omega}(x_0)$．从而

$$y'''(x_0)-\overline{\omega}'''(x_0)\geq\frac{y(x_0)-\overline{\omega}(x_0)}{1+y(x_0)-\overline{\omega}(x_0)}>0\ . \tag{28}$$

这与（27）式相矛盾；

如果 $x_0<\xi$，则不难证明

$$y'''(x)-\overline{\omega}'''(x)\geq 0\quad(x_0\leq x\leq\xi). \tag{29}$$

事实上，对任一 $x_1\in[x_0,\xi]$，若 $y(x_1)>\overline{\omega}(x_1)$，则仿（28）式知，$y'''(x_1)-\overline{\omega}'''(x_1)>0$；若 $y(x_1)<\overline{\omega}(x_1)$，则由（23）式，$H(x_1,y(x_1))=h(x_1,y(x_1))$．据 $h(x,y)$ 关于 y 的不增性便得 $y'''(x_1)-\overline{\omega}'''(x_1)\geq 0$．可见（29）式成立．由 $y'(x_0)-\overline{\omega}'(x_0)>0$ 及（26），(29) 式易知 $[x_0,\xi]\subset[\alpha_0,\beta_0]$．据（23）式，$y''(\xi)-\overline{\omega}''(\xi)>0$．从而，当 $x_0\leq x\leq\xi$ 时，$y''(x)-\overline{\omega}''(x)\geq 0$，并且存在正数 $\delta\leq\xi-x_0$，使得当 $\xi-\delta\leq x\leq\xi$ 时，$y''(x)-\overline{\omega}''(x)>0$．这与 x_0 的定义相矛盾．

上述矛盾表明（22）式成立．至此，定理证完．

将定理 1 的证明略加变通，根据引理 1 便不难逐一证明：对于边值问题（1）、(k)($k=3,4,5,6$）而言，只须将（20）式依次改换成

$$\underline{\omega}(a)\leq\alpha\leq\overline{\omega}(a),\quad \underline{\omega}'(a)\leq\beta\leq\overline{\omega}'(a),\quad \underline{\omega}''(b)\leq\gamma\leq\overline{\omega}''(b);$$

$$\underline{\omega}(a)\leq\alpha\leq\overline{\omega}(a),\quad \underline{\omega}'(a)\leq\beta\leq\overline{\omega}'(a),\quad \underline{\omega}'(b)\leq\gamma\leq\overline{\omega}'(b);$$

$$\underline{\omega}(a)\leq\alpha\leq\overline{\omega}(a),\quad \underline{\omega}'(b)\leq\beta\leq\overline{\omega}'(b),\quad \underline{\omega}''(b)\leq\gamma\leq\overline{\omega}''(b);$$

$$\underline{\omega}(a)\leq\alpha\leq\overline{\omega}(a),\quad \overline{\omega}''(a)\leq\beta\leq\underline{\omega}''(a),\quad \underline{\omega}(b)\leq\gamma\leq\overline{\omega}(b),$$

便各有相应于定理 1 的结果成立．兹不赘述．

定理 2　设 $h(x,y)$ 在区域 D 上关于 y 为不减函数．则边值问题（1）、(7）有解的充要条件是存在方程（1）于 $[a,b]$ 上的上解 $\overline{\omega}(x)$ 与下解 $\underline{\omega}(x)$，使得

$$\overline{\omega}(x)\leq\underline{\omega}(x)\quad(a\leq x\leq b);$$

$$\underline{\omega}'(a)\leq\alpha\leq\overline{\omega}'(a),\quad \overline{\omega}(b)\leq\beta\leq\underline{\omega}(b),\quad \underline{\omega}''(b)\leq\gamma\leq\overline{\omega}''(b) \tag{30}$$

此外，若上述充分条件成立，则边值问题（1）、(7）存在解 $y=y(x)$，满足不等式

$$\overline{\omega}(x)\leq y(x)\leq\underline{\omega}(x)\quad(a\leq x\leq b). \tag{31}$$

证明　必要性显然．为证明充分性，设 $x=-t$，$F(t,y)=-f(-t,y)$，则边值问题（1）、（7）可化为

$$\frac{d^3y}{dt^3}=F(t,y), \tag{32}$$

$$y\Big|_{t=-b}=\beta,\quad \frac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=-b}=\gamma,\quad \frac{dy}{dt}\Big|_{t=-a}=-\alpha\ . \tag{33}$$

显然，$F(t, y)$ 在区域

$$D_1=\{(t, y)\mid -b\le t\le -a,\quad -\infty<y<\infty\}$$

上连续，并且关于y为不增函数．令

$$\psi(t)=\underline{\omega}(-t),\quad \varphi(t)=\overline{\omega}(-t),$$

则易证$\psi(t)$、$\varphi(t)$ 分别是方程（32）的上、下解，并且

$$\varphi(t)\le\psi(t)\quad(-b\le t\le -a);$$

$$\varphi(-b)\le\beta\le\psi(-b),\ \left.\frac{d^2\psi}{dt^2}\right|_{t=-b}\le\gamma\le\left.\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|_{t=-b},\ \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=-a}\le-\alpha\le\left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{t=-a};$$

于是，按定理 1 立见边值问题（32)、(33）有解$y=\tilde{y}(t)$，并且满足不等式

$$\varphi(t)\le\tilde{y}(t)\le\psi(t)\quad(-b\le t\le -a)$$

故$y(x)=\tilde{y}(-x)$ 便是边值问题（1)、(7）之满足不等式（31）的解．证毕．

仿定理 2 的证明，，并依次根据上述关于边值问题（1)、(k)（k=3、4、5、6）之类似于定理 1 的结果以及文〔1〕定理10，不难逐一证明：对于边值问题（1)、(i)（i=8, 9, 10, 11, 12）而言，只须将（30）式依次更改为

$$\overline{\omega}''(a)\le\alpha\le\underline{\omega}''(a),\qquad \overline{\omega}(b)\le\beta\le\underline{\omega}(b),\qquad \underline{\omega}'(b)\le\gamma\le\overline{\omega}'(b);$$
$$\underline{\omega}'(a)\le\alpha\le\overline{\omega}'(a),\qquad \overline{\omega}(b)\le\beta\le\underline{\omega}(b),\qquad \underline{\omega}'(b)\le\gamma\le\overline{\omega}'(b);$$
$$\underline{\omega}'(a)\le\alpha\le\overline{\omega}'(a),\qquad \overline{\omega}''(a)\le\beta\le\underline{\omega}''(a),\qquad \overline{\omega}(b)\le\gamma\le\underline{\omega}(b);$$
$$\overline{\omega}(a)\le\alpha\le\underline{\omega}(a),\qquad \overline{\omega}(b)\le\beta\le\underline{\omega}(b),\qquad \underline{\omega}'(b)\le\gamma\le\overline{\omega}'(b);$$
$$\overline{\omega}(a)\le\alpha\le\underline{\omega}(a),\qquad \overline{\omega}(b)\le\beta\le\underline{\omega}(b),\qquad \underline{\omega}'(b)\le\gamma\le\overline{\omega}'(b).$$

便各有相应于定理 2 的结果成立．

三、三点边值问题　本节将始终假定$h(x, y)$ 在区域

$$\mathrm{E}=\{(x, y)\mid a\le x\le c,\quad -\infty<y<\infty\}$$

上连续．

引理2　若存在$M>0$，使得当$(x, y)\in\mathrm{E}$时，$|h(x, y)|\le M$，则边值问题（1)、(k)（k=13，14，15，16）有解．

证明　这里只证明k=13的情形（余者类似可证)．不难求出边值问题

$$\begin{cases}y'''=0,\\ y'(a)=0,\quad y(b)=0,\quad y''(c)=0\end{cases}$$

的Green函数：当参数$\zeta\in(a, b]$ 时，

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}[(b-a)^2-(x-a)^2-(b-\xi)^2+(x-\xi)^2], & \xi\le x,\\ \frac{1}{2}[(b-a)^2-(x-a)^2-(b-\xi)^2], & \xi>x;\end{cases}$$

当参数$\zeta\in(b, c)$ 时，

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}[(b-a)^2-(x-a)^2+(x-\xi)^2], & \xi\le x,\\ \frac{1}{2}[(b-a)^2-(x-a)^2], & \xi>x.\end{cases}$$

记

$$R=\frac{5}{6}M(c-a)^3+\frac{|\gamma|}{2}(c-a)(|a|+|c|+2|b|)+|\alpha-\gamma a|(c-a)+|\beta|,$$

$$T[y(x)]=\int_a^c G(x,\xi)h(\xi, y(\xi))d\xi+\frac{\gamma}{2}(x^2-b^2)+(\alpha-\gamma a)(x-b)+\beta,\qquad(34)$$

注意到当$x\ge b$时，

$$T[y(x)]=\frac{1}{2}\int_a^b [(b-a)^2-(x-a)^2-(b-\xi)^2+(x-\xi)^2]h(\xi,\ y(\xi))d\xi+\frac{1}{2}\int_b^c[(b-a)^2-$$
$$(x-a)^2]h(\xi,\ y(\xi))d\xi+\frac{1}{2}\int_b^x\ (x-\xi)^2\ \ (\xi,\ y(\xi))d\xi+\frac{\gamma}{2}\ (x^2-b^2)+(\alpha-\gamma a)(x-b)+\beta;$$

当$x\leq b$时，

$$T[y(x)]=\frac{1}{2}\int_a^b [(b-a)^2-(x-a)^2-(b-\xi)^2]h(\xi,\ y(\xi))d\xi+\frac{1}{2}\int_b^c [(b-a)^2-(x-a)^2]\cdot$$
$$h(\xi,\ y(\xi))d\xi+\frac{1}{2}\int_a^x\ (x-\xi)^2h(\xi,\ y(\xi))d\xi+\frac{\gamma}{2}(x^2-b^2)+(\alpha-\gamma a)(x-b)+\beta,$$

便不难证明由（34）式所难定的把Banach空间$C[a,\ c]$内的有界凸闭集

$$J[a,\ c]=\{y(x)\ |y(x)\ \ C[a,\ c],\ \ |y(x)|\leq R\}$$

映到其自身的算子T是全连续算子．根据Schauder不动点定理立见算子T在集$J[a,\ c]$内有不动点．此不动点显然是边值问题（1）、(13) 的解．

定理 3　设$h(x,\ y)$在区域E之相应于$a\leq x\leq b$的子域上关于y为不减函数，而在E之相应于$b\leq x\leq c$的子域上关于y为不增函数，则边值问题（1）、(13) 有解的充要条件是存在方程（1）于$[a,\ c]$上的上解$\overline{\omega}(x)$与下解$\underline{\omega}(x)$，使得

$$\overline{\omega}(x)\leq\underline{\omega}(x)\ \ (a\leq x\leq b),\qquad \underline{\omega}(x)\leq\overline{\omega}(x)\ \ (b\leq x\leq c);\tag{35}$$

$$\underline{\omega}'(a)\leq\alpha\leq\overline{\omega}'(a),\qquad \underline{\omega}(b)=\beta=\overline{\omega}(b),\qquad \underline{\omega}''(c)\leq\gamma\leq\overline{\omega}''(c).\tag{36}$$

此外，若上述充分条件成立，则边值问题（1）、(13) 存在解$y=y(x)$，满足不等式

$$\overline{\omega}(x)\leq y(x)\leq\underline{\omega}(x)\ \ (a\leq x\leq b),\ \ \underline{\omega}(x)\leq y(x)\leq\overline{\omega}(x)\ \ (b\leq x\leq c).\tag{37}$$

证明　必要性显然．今往证充分性．若

$$\underline{\omega}(x)=\overline{\omega}(x)\ \ (a\leq x\leq c)\tag{38}$$

则$y=\overline{\omega}(x)$便是（1）、(13) 之满足（37）式的解；若（38）式不成立，则由$\overline{\omega}(b)=\underline{\omega}(b)$及（35）式，仿定理 1 中情形 1°的证明可知$\underline{\omega}'(b)<\overline{\omega}'(b)$．令

$$H(x,\ y)=\begin{cases} h(x,\ \omega(x))+\dfrac{|y-\overline{\omega}(x)|}{1+|y-\overline{\omega}(x)|}, & \text{当 } y<\overline{\omega}(x)(a\leq x\leq b)\ \text{或}\ y>\overline{\omega}(x)(b\leq x\leq c)\ \text{时}, \\ h(x,\ y),\ \text{当}\ \overline{\omega}(x)\leq y\leq\underline{\omega}(x)(a\leq x\leq b)\ \text{或}\ \underline{\omega}(x)\leq y\leq\overline{\omega}(x)(b\leq x\leq c)\ \text{时}, & \\ h(x,\ \underline{\omega}(x))-\dfrac{|y-\underline{\omega}(x)|}{1+|y-\underline{\omega}(x)|}, & \text{当}\ y>\underline{\omega}(x)(a\leq x\leq b)\ \text{或}\ y<\underline{\omega}(x)(b\leq x\leq c)\ \text{时}, \end{cases}$$

则按引理 2 可知，边值问题

$$\begin{cases} y'''=H(x,\ y), \\ y'(a)=\alpha,\ y(b)=\beta,\ y''(c)=\gamma \end{cases}$$

有解$y=y(x)$．将定理 1 的证明适当变通便不难推得

$$\overline{\omega}(x)\leq y(x)\leq\underline{\omega}(x)\ (a\leq x\leq b),\ \ \underline{\omega}(x)\leq y(x)\leq\overline{\omega}(x)\ \ (b\leq x\leq c).$$

据此立见$y=y(x)$为边值问题（1）、(13) 之满足不等式（37）的解．证毕．

将定理 3 的证明稍加变通，根据引理 2 便不难逐一证明：对于边值问题（1）、(k)($k=$14, 15, 16) 而言，只须将（36）式依次替换成

$$\overline{\omega}(a)\leq\alpha\leq\underline{\omega}(a),\qquad \overline{\omega}(b)=\beta=\underline{\omega}(b),\qquad \underline{\omega}''(c)\leq\gamma\leq\overline{\omega}''(c);$$
$$\overline{\omega}(a)\leq\alpha\leq\underline{\omega}(a),\qquad \overline{\omega}(b)=\beta=\underline{\omega}(b),\qquad \underline{\omega}'(c)\leq\gamma\leq\overline{\omega}'(c);$$
$$\underline{\omega}'(a)\leq\alpha\leq\overline{\omega}'(a),\qquad \overline{\omega}(b)=\beta=\underline{\omega}(b),\qquad \underline{\omega}'(c)\leq\gamma\leq\overline{\omega}'(c),$$

便各有相应于定理 3 的结果成立．毋须赘述．

定理4 假设定理3的条件成立，则边值问题（1）、(17）有解的充要条件是存在方程（1）于〔a, c〕上的上解$\bar{\omega}(x)$与下解$\underline{\omega}(x)$，使得

$$\bar{\omega}(x)\leq\underline{\omega}(x)\quad(a\leq x\leq b),\quad \underline{\omega}(x)\leq\bar{\omega}(x)\quad(b\leq x\leq c);$$

$$\bar{\omega}''(a)\leq\alpha\leq\underline{\omega}''(a),\quad \bar{\omega}(b)=\beta=\underline{\omega}(b),\quad \underline{\omega}'(c)\leq\gamma\leq\bar{\omega}'(c). \tag{39}$$

此外，若上述充分条件成立，则边值问题（1）、(17）存在解$y=y(x)$，满足不等式

$$\bar{\omega}(x)\leq y(x)\leq\underline{\omega}(x)\quad(a\leq x\leq b),\quad \underline{\omega}(x)\leq y(x)\leq\bar{\omega}(x)\quad(b\leq x\leq c). \tag{40}$$

证明 必要性显然．为证明充分性，作变换$x=-t$，并记$\tilde{y}(t)=-y(-t)$，$F(t,\tilde{y}(t))=h(-t,-\tilde{y}(t))$，则边值问题（1）、(17）可化为

$$\begin{cases}\dfrac{d^3\tilde{y}}{dt^3}=F(t,\tilde{y}), & (41)\\[2ex] \dfrac{d\tilde{y}}{dt}\Big|_{t=-c}=\gamma,\quad \tilde{y}\Big|_{t=-b}=-\beta,\quad \dfrac{d^2\tilde{y}}{dt^2}\Big|_{t=-a}=-\alpha. & (42)\end{cases}$$

显而易见，$F(t,\tilde{y})$在区域

$$E_1=\{(t,\tilde{y})\,|-c\leq t\leq -a,\ -\infty<\tilde{y}<\infty\}$$

之相应于$-c\leq t\leq -b$的子域上关于$\tilde{y}$为不减函数，在E_1之相应于$-b\leq t\leq -a$的子域上关于$\tilde{y}$为不增函数．设

$$\psi(t)=-\bar{\omega}(-t),\quad \varphi(t)=-\underline{\omega}(-t).$$

容易证明$\psi(t)$、$\varphi(t)$分别是方程（41）于〔$-c, -a$〕上的上、下解，并且

$$\psi(t)\leq\varphi(t)\quad(-c\leq t\leq -b),\quad \varphi(t)\leq\psi(t)\quad(-b\leq t\leq -a);$$

$$\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=-c}\leq\gamma\leq\frac{d\psi}{dt}\Big|_{t=-c},\quad \varphi(-b)=-\beta=\psi(-b),\quad \frac{d^2\varphi}{dt^2}\Big|_{t=-a}\leq-\alpha\leq\frac{d^2\psi}{dt^2}\Big|_{t=-a}.$$

根据定理3便知边值问题（41）、(42）有解$\tilde{y}=\tilde{y}(t)$，满足不等式

$$\psi(t)\leq\tilde{y}(t)\leq\varphi(t)\quad(-c\leq t\leq -b),\quad \varphi(t)\leq\tilde{y}(t)\leq\psi(t)\quad(-b\leq t\leq -a).$$

故$y(x)=-\tilde{y}(-x)$便是边值问题（1）、(17）之满足不等式（40）的解．证毕．

仿定理4的证明，并分别根据上述关于边值问题（1），(k)（k＝14，15）之类似于定理3的结果，不难逐一证明；对于边值问题（1）、(j)（j＝18，19）而言，只须将（39）式依次更之为

$$\bar{\omega}''(a)\leq\alpha\leq\underline{\omega}''(a),\quad \bar{\omega}(b)=\beta=\underline{\omega}(b),\quad \underline{\omega}(c)\leq\gamma\leq\bar{\omega}(c);$$

$$\underline{\omega}'(a)\leq\alpha\leq\bar{\omega}'(a),\quad \bar{\omega}(b)=\beta=\underline{\omega}(b),\quad \underline{\omega}(c)\leq\gamma\leq\bar{\omega}(c),$$

便各有相应于定理4的结果成立．

参 考 文 献

〔1〕Klaasen, G.A., Differential Inequalities and Existence Theorems for Second and Third Order Boundary Value Problems, J.Diff.Eqs., 10, 529—537 (1971).

〔2〕Jackson, L.K.and Schrader, K., Subfunctions and Third Order Differential Inequalities, J.Diff. Eqs., 8, 180—194 (1970).

Existance of Solutions of Boundary Value Problems For a Class of Third Order Nonlinear Differential Equations

Zhao Weili

(Department of Mathematics, Jilin University)

Abstract

In article [1] G.A.Klaasen investigated the existence of solutions of two-point and three-point boundary value problems for a class of third order nonlinear differential equation

$$y''' = h(x, y),$$

satisfying respectively following conditions

$$y(a) = \alpha,\ \ y'(a) = \beta,\ \ y(b) = \gamma \quad (a<b)$$

and

$$y(a) = \alpha,\ \ y(b) = \beta,\ \ y(c) = \gamma \quad (a<b<c),$$

where $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ are all constants.

In this paper we will use the method of [1] to discuss problems about the existence of solutions of two-point and three-point boundary value problems for the above equation satisfying respectively following conditions

$$y(a) = \alpha,\quad y''(a) = \beta,\quad y^{(i)}(b) = \gamma \quad (i = 0, 1);$$
$$y(a) = \alpha,\quad y'(a) = \beta,\quad y^{(i)}(b) = \gamma \quad (i = 1, 2);$$
$$y(a) = \alpha,\quad y^{(i)}(b) = \beta,\quad y''(b) = \gamma \quad (i = 0, 1);$$
$$y'(a) = \alpha,\quad y(b) = \beta,\quad y^{(i)}(b) = \gamma \quad (i = 1, 2);$$
$$y^{(i)}(a) = \alpha,\ y(b) = \beta,\quad y'(b) = \gamma \quad (i = 0, 2);$$
$$y'(a) = \alpha,\quad y''(a) = \beta,\quad y(b) = \gamma$$

and

$$y^{j}(a) = \alpha,\ \ y(b) = \beta,\ \ y^{(k)}(c) = \gamma\ ,$$

where $j, k \in \{0, 1, 2\}, (j, k) \notin \{(0, 0), (2, 2)\}$. We will give the necessary and sufficient conditions of the existence of solutions of the boundary value problems mentioned above one by one.