二阶非线性椭圆型方程组某些带复共轭值的边值问题

李子植 李鸿振 闻国椿
（河北大学） （北京大学）

§1．引 言

本文讨论二阶非线性一致椭园型复方程

$$w_{z\bar z}=F(z,w,w_z,\bar w_z,w_{zz},\bar w_{zz}),\ F=Q_1 w_{zz}+Q_2\bar w_{\bar z\bar z}+Q_3\bar w_{zz}+Q_4 w_{\bar z\bar z}+A_1 w_z+A_2\bar w_{\bar z}+A_3\bar w_z+A_4 w_{\bar z}+A_5 w+A_6\bar w+A_7,\ Q_j=Q_j(z,w,w_z,\bar w_z,w_{zz},\bar w_{zz}),\ j=1,2,3,4,\ A_j=A_j(z,w,w_z,\bar w_z),\ j=1,\cdots,7. \tag{1.1}$$

于多连通区域D上某些带复共轭值的边值问题．不失一般性，可以认为D是单位园内的$N+1$连通园界区域，其边界是Γ_j $|z-s_j|=r_j$, $j=1,\cdots,N$, Γ_0: $|z|=1$，且$0\in$D．设在D内有n条互相外离的约当闭曲线$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m,\gamma_{m+1},\cdots,\gamma_n$，且$\gamma_*=\gamma_1+\cdots+\gamma_m$, $\gamma_{**}=\gamma_{m+1}+\cdots+\gamma_n\in C_v^1$ $(\frac{1}{2}<v<1)$．以D_j表示由γ_j $(j=1,\cdots,n)$围成的有界区域，并记$D_*^-=(\bigcup_{j=1}^{m}D_j)\cap D$, $D_{**}^-=(\bigcup_{j=m+1}^{n}D_j)\cap D$, $D^-=D_*^-\cup D_{**}^-$, $D^+=D-\bar D^-$, $z=0\in D^+$, $\Gamma=\partial D$．

设方程（1.1）在D上满足文〔1〕中的条件C，其中主要条件

$$\begin{cases}\|A_j(z,w,w_z,\bar w_z)\|_{L_p(\bar D)}\le k_0,\ j=1,\cdots,7,\\ \|A_j(z,w,w_z,\bar w_z)\|_{L_p(\bar D)}\le k_1,\ j=3,\cdots,6,\ (k_0<k_1<\infty),\end{cases} \tag{1.2}$$

$$|F(z,w,w_z,\bar w_z,U_1,V_1)-F(z,w,w_z,\bar w_z,U_2,V_2)|\le q_0|U_1-U_2|+q_0'|V_1-V_2|\ (q_0+q_0'<1). \tag{1.3}$$

我们要讨论的第一种带复共轭值和带位移的边值问题的边界条件是

$$u_j^+[a_j(t)]=G_{j1}(t)u_j^-(t)+G_{j2}(t)\overline{u_j^-(t)}+g_{j1}(t,w^+,w^-)+g_{j2}(t),t\in\gamma,\ j=1,2, \tag{1.4}$$

$$u_j^+[a_j(t)]=G_{j1}(t)u_j^+(t)+g_{j1}(t,w^+,0)+g_{j2}(t),t\in\Gamma,\ j=1,2. \tag{1.5}$$

其中$u_1=w_t$, $u_2=\bar w_t$, $a_j(t)(j=1,2)$在γ_* $(\gamma=\gamma_*+\gamma_{**})$上是正位移，在$\gamma_{**}$上是反位移，在$\Gamma=\Gamma_0+\cdots+\Gamma_N$上$a_j[a_j(t)]=t$, G_{jk}、g_{jk}满足

$$|G_{j1}(t)|>|G_{j2}(t)|,\ t\in\gamma_*,\ |G_{j1}(t)|<|G_{j2}(t)|,\ t\in\gamma\ ; \tag{1.6}$$

$$G_{j1}[a_j(t)]G_{j1}(t)=1,\ t\in\Gamma,\ j=1,2; \tag{1.7}$$

$$G_{j1}(t)g_j[a_j(t)]+g_j(t)=0,\ t\in\Gamma,\ j=1,2. \tag{1.8}$$

这里简记$g_j(\ )=g_{j1}(t,w^+,0)+g_{j2}(t)$, $t\in\Gamma$．还假设

*1983年6月24日收到，1984年6月28日收到修改稿．

$$\begin{cases} C_\nu[G_{jk}(t),\partial D^{\pm}]\leq d<\infty,\ C_\nu[g_{j2}(t),\partial D^{\pm}]\leq d,\ |g_{j1}(t,0,0)|\leq d,\ j,k=1,2, \\ |g_{j1}(t_1,X_1,Y_1)-g_{j1}(t_2,X_2,Y_2)|\leq d_1|t_1-t_2|^{\nu}+d_2|X_1-X_2|^{\nu}+d_3|Y_1-Y_2|^{\nu}, \\ C'_\nu[a_j(t),\partial D^{\pm}]\leq d,\ |a'_j(t)|\geq d^{-1}>0,\ t_j\in\partial D^{\pm},\ X_j,Y_j\in E,\ j=1,2. \end{cases} \quad (1.9)$$

此处$\nu(\frac{1}{2}<\nu<1)$、d、$d_j(<d)$，$j=1,2,3$，都是正常数，且$d>1$．记

$$\begin{cases} K_{j1}=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_j}\arg G_{j1}(t),\ j=1,\cdots,m,\ K_{j2}=\frac{-1}{2\pi}\Delta_{\gamma_j}\arg G_{j2}(t), \\ j=m+1,\cdots,n,\ K_{j0}=\frac{-1}{2\pi}\Delta\arg G_{j1}(t),\ j=1,2 \end{cases} \quad (1.10)$$

并称$K_j=K_{j0}+\sum_{k=1}^{2}2K_{jk}-f_j$为上述边值问题的指数，这里$f_j$表$a_j(t)$在$\Gamma$上使$G_{j1}(t)=-1$的不动点的个数．我们把求复方程（1.1）满足边界条件（1.4）—（1.10）且在$D^{\pm}$上的分片连续可微解$w(z)=\begin{cases} w^{+}(z), & z\in D^{+} \\ w^{-}(z), & z\in D^{-}\end{cases}$的问题简称为问题A．

以下只就$K_j\geq 0$（$j=1,2$）的情形作讨论．一般地说，问题A不一定都可解．因此，我们考虑相应于问题A的变态问题B，即求一阶复方程

$$\begin{cases} U_{1\bar z}=f(z,w,U_1,U_2,U_{1z},U_{2z}),\ f=Q_1U_{1z}+Q_2\bar U_{1\bar z}+Q_3U_{2z}+Q_4\bar U_{2\bar z}+ \\ A_1U_1+A_2\bar U_1+A_3U_2+A_4\bar U_2+A_5w+A_6\bar w+A_7,\ Q_j=Q_j(z,w,w_z,w_z,U_{1z},U_{2z}), \\ j=1,\cdots,4,\ A_j=A_j(z,w,w_z,\bar w_z),\ j=1,\cdots,7,\ U_{1\bar z}=\bar U_{2z}. \end{cases} \quad (1.11)$$

于$D^{\pm}$上的分片正则解$[w(z),U_1(z),U_2(z)]$，使满足边界条件：

$$U_j^{+}[a_j(t)]=G_{j1}(t)U_j^{-}(t)+G_{j2}(t)\overline{U_j^{-}(t)}+g_j(t),\ t\in\gamma, \quad (1.12)$$

$$U_j^{+}[a_j(t)]=G_{j1}(t)U_j^{+}(t)+g_j(t),\ t\in\Gamma;\ j=1,2 \quad (1.13)$$

（为简便计，这里及后面也记$g_j(t)=g_{j1}(t,w^{+},w^{-})+g_{j2}(t)$，当$t\in\gamma$）和点型条件：

$$B_{jk}U_j(a_k)=b_{jk},\ k=1,\cdots,[\frac{2+K_j}{2}].^{*} \quad (1.14)$$

其中$a_k(k=1,\cdots,[\frac{2+K_j}{2}])$为$D^{+}$中不同的点，$b_{jk}(k=1,\cdots,[\frac{2+K_j}{2}])$均为复常数，且$|b_{jk}|\leq d$．此外，还要求$w(z)$，$U_1(z)$，$U_2(z)$满足关系式：

$$\begin{cases} w(z)=w_0+\int_0^z[U_1(z)+\sum_{m=1}^{N}\frac{d_m}{z-z_j}]dz+\overline{U_2(z)}\,d\bar z,\ z\in D^{+}, \\ w(z)=w_j+\int_{z_j^*}^z[U_1(z)+\sum_{m=1}^{n}\frac{d'_{m_j}}{z-z'_j}]dz+\overline{U_2(z)}\,d\bar z,\ z_j^*,\ z\in D_j,\ j=1,\cdots,n'+n''. \end{cases} \quad (1.15)$$

这里$w_j(j=0,\cdots,n'+n'')$都是复常数，$|w_j|\leq d$，z_j是D^{+}的内边界分支所围有界区域$D_j^{-}(j=1,\cdots,N',N'\leq n+N)$内的点，$D_j^{-}(j=1,\cdots,n'+n'')$为$D^{-}$中的各区域，不妨设$D_j^{-}(j=1,\cdots,n')$为其中的$n'_j+1(n'_j\geq 1)$连通区域，而$D_j^{-}(j=n'+1,\cdots,n'')$均为单连通区域．易知$n'_1+\cdots+n'_{n'}+N'=n+N$，而$z'_{m_j}$为$D_j^{-}$之各内边界分支所围的一些有界区域内的点．又（1.15）式中的$d_m(m=1,\cdots,N')$、$d'_{m_j}(m=1,\cdots,n'_j,j=1,\cdots,n)$都是适当选取

*）由［3］P.153，K_j必为偶数．

的复常数，但$d'_{m_j}=0$（$m=n'+1,\cdots,n''$，$j=1,\cdots,n$），使得由（1.15）式所确定的函数分别在D^+、D^-内单值．我们把求一阶复方程（1.11）满足（1.12）—（1.15）的解$w(z)$、$U_1(z)$、$U_2(z)$简称为问题B．

本文要讨论的复方程（1.1）的第二种带复共轭值的边值问题（简称问题C）的边界条件为

$$U_j^+[a_j(t)]=G_{j1}(t)U_j^-(t)+G_{j2}(t)\overline{U_j^-(t)}+\varepsilon g_{j1}(t,w^+,w^-)+g_{j2}(t),$$

$$t\epsilon\gamma+\Gamma_0,\quad j=1,2,（\varepsilon为适当小的正数） \tag{1.16}$$

这里$a_j(t)$在Γ_0上是反位移，又$G_{j1}(t)$、$G_{j2}(t)$、$a_j(t)$满足条件（1.6）、（1.9），但其中的γ_*要代之以$\gamma_{**}+\Gamma_0$，D^+是γ与Γ_0所围成的有界区域，D^-是Γ_0的外部区域与γ_j所围的有界区域D_j（$j=1,\cdots,n$）的和集，$\partial D^{\pm}=\gamma_*+\gamma_{**}+\Gamma_0$．记$K_{j0}=-\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_0}\arg G_{j1}(t)$，$j=1,2$，称$K_j=\sum_{k=0}^{2}2K_{jk}$为此边值问题的指数．对于问题C，以下也只就$K_j\geq0$（$j=1,2$）的情形进行讨论，至于其余情形，可相仿的证明．在现在的情形下，记E_R为$|z|<R$（R是充分大的正数，使得$\Gamma_0\subset E_R$），并设在E_R上方程（1.1）满足条件，且当$z\in E_R$时，$Q_j=A_j=0$．

我们同样需要提出相应于问题C的变态问题D，即求一阶复方程（1.11）于D 内的分片正则解〔$w(z)$，$U_1(z)$，$U_2(z)$〕，使它满足下列边界条件和点型条件：

$$U_j^+[a_j(t)]=G_{j1}(t)U_j^-(t)+G_{j2}(t)\overline{U_j^-(t)}+g_j(t),\quad t\in\gamma+\Gamma_0, \tag{1.17}$$

$$B_jU(a_k)=b_{jk},\quad k=1,\cdots,K_j,\ U_j(\infty)=0,\quad j=1,2. \tag{1.18}$$

这里a_k（$k=1,\cdots,k_j$）是Γ_0^-（Γ_0的外部区域）内不同的有穷点，b_{jk}都是复常数且$|b_{jk}|\leq d<\infty$，$k=1,\cdots,K_j$，$j=1,2$.我们还要求$w(z)$、$U_1(z)$、$U_2(z)$满足关系式：

$$\left\{\begin{array}{l} w(z)=w_0+\int_0^z[U_1(z)+\sum_{m=1}^{n}\frac{d_m}{z-z_j}]dz+\overline{U_2(z)}d\bar z,\ z\epsilon D^+,\\ w(z)=w_j+\int_{z_j^*}^z[U_1(t)dz+\overline{U_2(z)}d\bar z],\quad z_j^*\epsilon D_j^-,\quad z\epsilon D_j^-,\ j=1,\cdots,n,\\ w(z)=w_{n+1}+\int_{z_{n+1}^*}^z[U_1(z)+\frac{d_{n+1}}{z}]dz+\overline{U_2(z)}d\bar z,\ z_{n+1}^*\neq\infty,\ z\epsilon D_0^-,\end{array}\right. \tag{1.19}$$

这里w_j（$j=0,\cdots,n+1$）都是复常数，$|w_j|\leq d$，又d_m（$m=1,\cdots,n+1$）都是适当选取的复常数，使得由（1.19）式确定的函数$w(z)$在$D^{\pm}$内单值，但允许$w(z)$在点∞有对数奇性．

§2．复方程（1.1）之问题C和（1.11）之问题D的可解性

先给出问题D一类有界解的估计式．

定理2.1 设一阶复方程（1.11）在E_R上满足条件C，又其中的常数q_0'，k_1以及边界条件（1.17）、（1.9）中的d_2、d_3适当小，则（1.11）之问题D满足条件

$$C^1[w(z),\overline{D^{\pm}}\cap E_R]\leq M_1,\quad \|\rho(z)\|=\|U_{1\bar z}\|_{L_{p_0}(E_R)}\leq M_2 \tag{2.1}$$

（M_1，M_2是待定常数，$2<p_0<\min(\rho,\frac{1}{1-\nu})$）的解〔$w(z)$，$U_1(z)$，$U_2(z)$〕必满足估计式：

$$C_\beta^1[w(z),\overline{D^{\pm}}\cap E_R]<M_3,\ C_\beta[U_j(z),\overline{D^{\pm}}]<M_4,\ j=1,2, \tag{2.2}$$

$$\|\,|U_{j\bar z}|+|U_{jz}|\,\|_{L_{p_0}(E_R)}<M_5,\ j=1,2, \tag{2.3}$$

其中$\beta=\dfrac{p_0-2}{p_0}$，$M_k=M_k(q_0,p_0,k_0,v,d,\mathrm{D}^{\pm},R)$，$k=3,4,5$，并可取$M_1=M_3$，$M_2=M_5$．

证　将定理中所述问题D的解$[w(z)$、$U_1(z)$、$U_2(z)]$代到方程（1.11）与边界条件（1.17）、（1.19），由定理条件，不论对怎样大的常数M_1，M_2，只要q_0'，k_1，d_2，d_3适当小，就可使其中的$A=Q_3U_{2z}+Q_4\bar{U}_{2\bar z}+A_3U_2+A_4\bar{U}_2+A_5w+A_6\bar{w}$与$g_{j1}(z,w^+,w^-)$满足条件

$$\|A(z)\|_{L_{p_0}(E_R)}\leq k_2,\ C_v[g_{j1}(z,w^+,w^-),\partial\mathrm{D}^{\pm}]\leq d_4,\tag{2.4}$$

这里$k_2=k_2(k_0)$，$d_4=d_4(d_1,\mathrm{D}^{\pm})$．上面第二个估计式是明显的，而第一个估计式是由于$U_2(z)$可看成是复方程

$$U_{2\bar z}=\bar{U}_{1z},\quad \|\bar{U}_{1z}\|\leq M_2\tag{2.5}$$

满足边界条件

$$U_2^+[a(t)]=G_{21}(t)U_2^-(t)+G_{22}(t)\overline{U_2^-(t)}+g_2(t),\ t\in\gamma+\Gamma_0\tag{2.6}$$

和点型条件（1.18）$(j=2)$之边值问题C_2的解．可以证明$U_2(z)$满足估计式

$$C_\beta[U_2(z),\bar{\mathrm{D}}^{\pm}\cap\mathrm{E}_R]\leq M_6,\ \|\,|U_{2\bar z}|+|U_{2z}|\,\|_{L_{p_0}(E_R)}\leq M_7,\tag{2.7}$$

这里$\beta=\dfrac{p_0-2}{p_0}$，$M_k=M_k(p_0,k_0,v,d,\mathrm{D}^{\pm},R)$，$k=6,7$．若得到（2.7）式，自然（2.4）式的第一式成立．因此，只需证明一阶线性复方程

$$U_{1\bar z}=f_*(z,U_1,U_2)=f_*=Q_1(z)U_{1z}+Q_2(z)\bar{U}_{1z}+AU_1+A_2\bar{U}_1+A_*,\ A_*=A+A_7\tag{2.8}$$

满足边界条件

$$U_1^+[a(t)]=G_{11}(t)U_1^-(t)+G_{12}(t)\overline{U_1^-(t)}+g_1(t),\ t\in\gamma+\Gamma_0\tag{2.9}$$

和点型条件（1.18）$(j=1)$之边值问题C_1的解$U_1(z)$满足估计式：

$$C_\beta[U_1(z),\bar{\mathrm{D}}^{\pm}\cap\mathrm{E}_R]\leq M_8,\ \|\,|U_{1z}|+|U_{1\bar z}|\,\|_{L_{p_0}(E_R)}\leq M_9,\tag{2.10}$$

$M_k=M_k(q_0,p_0,v,d,\mathrm{D}^{\pm},R)$，$k=8,9$．由于估计式（2.10）与（2.7）的证明方法相同，下面不妨只证明（2.10）．为此，我们可将$R(t)=G_{11}(t)/G_{12}(t)$（$|R(t)|<1$，当$t\in\gamma_{**}$）连续开拓到γ_j所围的有界区域$\mathrm{D}_j(j=m+1,\cdots,n)$内，使得开拓后的函数$R(z)$满足条件$|R(z)|<1$，$R(z)\in W^1_{p_0}(\mathrm{D}_j)$，$2<p_0<\min\left(p,\dfrac{1}{1-v}\right)$．也可将$R(t)=G_{12}(t)/G_{11}(t)$（$|R(t)|<1$，当$t\in\gamma_{**}$）连续开拓到$\gamma_j$所围的有界区域$\mathrm{D}_j(j=1,\cdots,m)$，将$R(t)=G_{11}(t)/G_{12}(t)$连续开拓到$\Gamma_0$外的区域$\mathrm{D}_0^-=\mathrm{D}_0$上，使开拓后的函数$R(z)$满足条件$|R(z)|<1$，$R(z)\in W^1_{p_0}(\mathrm{D}_j)$（$j=0,1,\cdots,m$），并可使$R(z)$在$\mathrm{E}_R$外等于0．在$\mathrm{D}_j(j=0,m+1,\cdots,n)$作变换$\overline{U(z)}=\overline{U_1(z)}+R(z)U_1(z)$，再使用适合粘合条件$\zeta_1[a_1(t)]=\overline{\zeta_2(t)}$（$t\in\gamma_{**}+\Gamma_0$）的粘合函数

$$\zeta(z)=\begin{cases}\zeta_1(z), & z\in\Delta^+,\\ \zeta_1^+[a(t)]=\overline{\zeta_2^-(t)}, & t\in\gamma_{**}+\Gamma_0,\ \zeta_2(\infty)=\infty,\\ \overline{\zeta_2(z)}, & z\in\Delta^-,\end{cases}\quad \text{作变换}\ V(\zeta)=\begin{cases}U_1[z_1(\zeta)],\ \zeta\in\zeta(\Delta^+),\\ \overline{U_2[z_2(\zeta)]},\ \zeta\in\zeta(\Delta^-),\end{cases}$$

其中Δ^+是$\gamma_{**}+\Gamma_0$围成的有界区域，$\Delta^-=\bigcup_{j=m+1}^{n}\mathrm{D}_j\cup\mathrm{D}_0$，$z_j(\zeta)$是$\zeta_j(z)$的反函数（见[3]，[4]），则方程（2.8）、边界条件（2.9）及点型条件（1.18）$(j=1)$依次变为如下形式：

$$V_{\bar\zeta}=f_1(\zeta,V,V_\zeta)\ (\text{它满足类似的条件C}),\tag{2.11}$$

$$\left\{\begin{array}{l} V^{+}(\zeta)=G(t)V^{-}(t)+g_1(t),\zeta\in\zeta(\gamma_*+\Gamma_0), \\ V^{+}[z_1(\sigma_1(\zeta))]=G_{11}[z_1(\zeta)]V^{-}(\zeta)+G_{12}[z_1(\zeta)]\overline{V^{-}(\zeta)} \\ \quad +g_1[z_1(\zeta)],\ \zeta\in\zeta(\gamma_*). \end{array}\right. \tag{2.12}$$

其中$\sigma_1(\zeta)=\zeta_1[a_1[z_1(\zeta)]]$, $\zeta\in\zeta(\gamma_*)$,

$$B_{1k}V[\zeta(a_k)]=b_{1k}^*,\ k=1,\cdots,\ K_j,\ V(\infty)=0. \tag{2.13}$$

于是由文〔2〕中的定理1.1和定理3.2，可知复方程（2.11）满足边界条件（2.12）和点型条件（2.13）的解是存在的，且满足估计式：

$$C_\beta[V(\zeta),\ \bar{S}^{\pm}\cap E_R]\le M_{10},\quad \| |V_{\bar\zeta}|+|V_\zeta| \|_{L_{p_0}(E_R)}\le M_{11}, \tag{2.14}$$

这里$M_k=M_k(q_0,p_0,k_0,\nu,d,D^{\pm},R)$，$S^{-}$表示$\zeta_1(\gamma_*)$、$\bar\zeta_2(\gamma_{**})$的内部点集及$\zeta_1(\Gamma_0)$的外部点集之和集，而$S^{+}$表示$\overline{S^{-}}$在全平面的余集．由此易得（2.10），从而有（2.2）式及（2.3）式．我们还可把（2.1）的待定常数M_1、M_2分别取成（2.2）、(2.3）中的M_3, M_5，即$M_1=M_3$，$M_2=M_5$．定理证毕．

定理2.2 在定理2.1的条件下，方程（1.11）之问题D是可解的．

证 引入Banach空间$C^1(\overline{D^{\pm}}\cap E_R)\times L_{p_0}(\bar{E}_R)$中的有界开集$B_M$，其元素$\omega=[w(z),\rho(z)]$满足下列条件：

$$C^1[w(z),\ \overline{D^{\pm}}\cap E_R]<M_3,\quad \|\rho(z)\|_{L_{p_0}(\bar{E}_R)}<M_5. \tag{2.15}$$

任取$\omega=[w(z),\rho(z)]\in\bar{B}_M$，作$T\rho_j=-\frac{1}{\pi}\iint_{E_R}\frac{\rho_j(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta$，其中$\rho_1(z)=\rho(z)$，$\rho_2(z)=\overline{\rho(z)}$．

考虑满足下列边界条件和点型条件的边值问题：

$$[\Phi_j(\tau)+T\rho_j]^{+}_{\tau=a(t)}=G_{j1}(t)[\Phi_j(t)+T\rho_j]^{-}+G_{j2}(t)\overline{[\Phi_j(t)+T\rho_j]^{-}}+g_j(t),$$
$$t\in\gamma+\Gamma_0,\quad j=1,2, \tag{2.16}$$

$$B_{jk}[\Phi_j(z)+T\rho_j]\big|_{z=a_k}=b_{jk},\ k=1,\cdots,\ K_j,\ \Phi_j(\infty)=0,\ j=1,2. \tag{2.17}$$

在（2.16）式中，$g_j(t)=g_{j1}(t,w^{+},w^{-})+g_{j2}(t)$，$t\in\gamma+\Gamma_0$，$w^{-}(t)$, $w(t)$是前面选取的函数$w(z)$在$\gamma+\Gamma_0$上分侧的极限值．如定理2.1那样，可将以上边值问题转化为一阶一致椭圆型复方程满足形如（2.12）和（2.13）之边界条件和点型条件的边值问题H，根据文〔2〕定理1.1，知此边值问题H具有分片解析函数的解$\Phi_j(z)$．记$U_j(z)=\Phi_j(z)+T\rho_j$, $j=1,2$，易知$U_{2z}=\overline{U_{1z}}=\overline{\rho(z)}$．将$w(z)$、$U_1(z)$、$U_2(z)$、$\Phi_1'(z)$、$\Phi_2'(z)$代入方程（1.11）适当的位置，并求解带参数$t(0\le t\le 1)$积分方程

$$\rho^*(z)=tf(z,w,U_1,U_2,\Phi_1'(z)+\Pi\rho^*,\ \Phi_2'(t)+\Pi\bar\rho^*) \tag{2.18}$$

应用压缩映射原理，可由以上积分方程求得唯一解$\rho^*(z)$，然后如前，可由$T\rho_j^*(j=1,2$, $\rho_1^*=\rho^*$，$\rho_2^*=\bar\rho^*$）求得解析函数$\Phi_j^*(z)(j=1,2)$，记$U_j^*(z)=\Phi_j^*(z)+T\rho_j^*(j=1,2)$，将$U_1^*$, U_2^*代入（1.19）中U_1、U_2的位置，可得函数$w^*(z)$，把由$\omega=[w(z),\rho(z)]$确定$\omega^*=[w^*(z),\ \rho^*(z)]$的映射记为$\omega^*=s[\omega,t]$，$0\le t\le 1$，仿文〔5〕，可证$\omega^*=S[\omega,t]$满足Leray—Schauder定理（见〔6〕）的条件．因此，泛函方程$\omega^*=s[\omega,t]$具有不动点$\omega=[w(z),\rho(z)]\in B_M$，特别当$t=1$时有不动点$\omega=[w(z),\ \rho(z)]\in B_M$，而$[w(z),U_1(z),U_2(z)]$便是复方程（1.11）之问题D的解，这里$U_j(z)=\Phi_j(z)+T\rho_j$, $\rho_1=\rho$, $\rho_2=\bar\rho^*$)．

*) 在证明过程中，应先设复方程（1.11）的系数在$\gamma+\Gamma_0$的附近等于0，当求出这种情况下问题D的解后，再通过解序列的逼近（见文〔7〕）便可得到原方程问题D的解．

由此定理，容易证明：

定理2.3 设二阶复方程（1.1）在E_R上满足条件C，又其中的常数q_0'、k_1及边界条件（1.16）、（1.9）中的常数d_2、d_3适当小，则（1.1）之问题C在$2n+2$个条件下可解.

应该提及，如果将边界条件（1.16）在Γ_0上的$a_j(t)$改为正位移，又$|G_{j1}(t)|<|G_{j2}(t)|$，$t\in\Gamma_0$，其余条件与（1.9）相同，且$K_{j0}=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_0}\arg G_{j1}(t)$，$j=1,2$，那么也可以讨论复方程（1.1）的这种边值问题的可解性.

§3. 复方程（1.1）的问题A和（1.11）之问题B的可解性

利用与§2中类似的方法，可证下列结果：

定理3.1 设一阶复方程（1.11）在D上满足条件C，又其中的常数q_0'、k_1及边界条件（1.12）、（1.13）、（1.9）中的常数d_2、d_3适当小，则（1.11）之问题B的满足条件

$$C^1[w(z),\bar{D}^{\pm}]\leq M_1,\quad \|\rho(z)\|=\|U_{1z}\|_{L_{p_0}(\bar{D}^{\pm})}\leq M_2 \tag{3.1}$$

（M_1，M_2是待定常数，$2<p_0<\min(p,\frac{1}{1-\nu})$）的解$[w(z),U_1(z),U_2(z)]$必满足估计式：

$$C^1_\beta[w(z),\bar{D}^{\pm}]<M_3,\quad C_\beta[U_j(z),\bar{D}^{\pm}]<M_4,\quad \||U_{jz}|+|U_{j\bar{z}}|\|_{L_{p_0}(\bar{D})}<M_5,\ j=1,2, \tag{3.2}$$

其中$\beta=\frac{p_0-2}{p_0}$，$M_k=M_k(q_0,p_0,k_0,\nu,d,D^{\pm})$，$k=3,4,5$，并可取$M_1=M_3$，$M_2=M_5$.

定理3.2 在定理3.1的条件下，方程（1.11）之问题B是可解的.

定理3.3 设二阶复方程（1.1）在D上满足条件C，又其中的常数q_0'、k_1及边界条件（1.4）、（1.5）、（1.9）中的常数d_2、d_3适当小，则（1.1）之问题A在$2(n+N)$个条件下可解.

参 考 文 献

〔1〕闻国椿，方爱农，二阶非线性椭园型方程组的复形式与某些边值问题，数学年刊，2（1981），201—216.

〔2〕闻国椿，一阶非线性椭园型偏微分方程组的黎曼型边值问题，北京大学学报（自然科学版），1980，4，1—13.

〔3〕Литвинчук Г.С.，Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом，1977.

〔4〕黄海洋，解析函数带位移的边值问题，北京师范大学学报（自然科学版），1982，4，11—24.

〔5〕闻国椿，关于线性、非线性复合边值问题，北京大学学报（自然科学版），1982，2，1—12.

〔6〕Leray J., Schauder J., Topologi et equations fonctionelles, Ann. Ecole Nom. Sup, 51（1934），45—78.

〔7〕闻国椿，一阶非线性椭园型复方程解的表示定理、凝聚原理与存在定理，河北化工学院学报，1980年数学专辑，41—61.

〔8〕闻国椿，二阶非线性椭圆型方程组在多连通区域上的斜微商边值问题，中国科学，A辑，1982，771—780.

〔9〕Векуа И.И.，广义解析函数，人民教育出版社，1960.