1987年8月

数学研究与评论
第七卷　第三期

二元四次样条函数空间的维数与基底*

吴　进

（北京航空学院）

摘要　本文讨论了一类多边形区域上样条空间S_4^2（D，Δ）的维数与基底，给出并证明了文献〔1〕中主要结果的推广形式．

在文献〔1〕中，作者解决了平面矩形区域上样条函数空间$S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(1)})$（$k=3$，$\mu=1$；$k=4$，$\mu=2$）的基底问题，其主要结果是基本的．本文将要考虑其中有关$S_4^2(\Delta_{mn}^{(1)})$基底结论的某些推广．我们在证明推广的结论的同时，还举出一个反例说明所加条件的必要性，否则我们必须着力于寻求新的基元．

一、定义与推广的维数公式

设D$\subset$**R**是任一单连通区域，Δ_I是$\mathbf{R}^2$上I-型均匀三角部分，l_i：$x-i=0$（$-\infty<i<+\infty$），l_j：$y-j=0$（$-\infty<j<+\infty$）和l_t：$x-y-t=0$（$-\infty<t<+\infty$）

定义1　若D$\subset\mathbf{R}^2$是一可做剖分Δ_I的多边形区域，则称D是标准的，记为D_N．

定义2　设D$\subset\mathbf{R}^2$是一区域，若对$\forall\, l_i, l_j, l_t\in(\mathbf{R}^2,\ \Delta_I)$都至多只作为（D，$\Delta_I$）中一条贯穿线，则称D是简单的，记为$D_S$．

例如$\{(x,\ y):0<x<m,\ 0<y<1-x\}$，或$\{(x,\ y):0<x<m,\ 0<y<x\}$以及$R_{r,s}=[0,\ r]\otimes[0,\ S]$都是既标准又简单的平面区域．

设$B(x,\ y)$是S_4^2中Frederickson样条．$B_{ij}(x,\ y)=B(x-i,\ y-j)$

$\Omega(D_N)=\{(i,\ j):B_{ij}(x,\ y)\not\equiv 0,\ (x,\ y)\in D_N\}$，$\mathrm{Num}\,\Omega(D_N)\overset{def}{=}\Omega(D_N)$中元素的数目．

沿用〔1〕的符号，用$\mathrm{loc}S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$表示支集全部落在$D_N$内的Fredrickson样条$B_{ij}(x,y)$张成的样条空间．

在本文的讨论中，推广的维数公式起了核心作用．

定理1　设Ω_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$）是$\mathbf{R}^2$中多边形区域，$\Omega_i\cap\Omega_j$（$i\neq j$）或为空集$\emptyset$，或为$\{\partial\Omega_j\}$．Δ_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$）分别是Ω_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$）上的拟贯穿剖分．若$\bigcup\limits_{i=1}^{p}(\Omega_i,\Delta_i)$仍为拟贯穿剖分区域，则

$$\dim S_k^\mu\left(\bigcup_{i=1}^{p}(\Omega_i,\ \Delta_i)\right)=\sum_{i=1}^{p}\dim S_k^\mu(\Omega_i,\ \Delta_i)+\sum_{i=1}^{N_\delta}d_k^\mu(n_i)+L_\delta\binom{k-\mu+1}{2}-(p-1)\binom{k+2}{2}$$

其中，N_δ为$\bigcup\limits_{i=1}^{p}(\Omega_i,\ \Delta_i)$中内网点个数的增量，$L_\delta$为贯穿线根数的增量．

证明　根据维数公式（〔2〕中定理3.1），对每个$i\in\{1,2,\cdots,\ p\}$，$S_k^\mu(\Omega_i,\ \Delta_i)$的维数仅与（$\Omega_i$，$\Delta_i$）的贯穿线数$L_i$和内网点数$N_i$有关．对$\bigcup\limits_{i=1}^{p}(\Omega_i,\ \Delta_i)$而言，在$\partial\Omega_i$上很可

* 1984年1月21日收到．

能出现新的内网点，自然有$N_\delta \geq 0$，同时，$\bigcup\limits_{i=1}^{p}(\Omega_i,\ \Delta_i)$ 也可能生成新的贯穿线，但不外乎下述两种情况：（i）某些$\partial\Omega_i$成为贯穿线，根数记为L_β；（ii）$\bigcup\limits_{i=1}^{p}(\Omega_i,\ \Delta_i)$ 中过新内网点的部分线成贯穿线，根数记为L_γ. 总之，$\bigcup\limits_{i=1}^{p}(\Omega_i,\ \Delta_i)$ 内贯穿线的变化量为$L_\beta - L_\gamma$记为L_δ. 于是，

$$\dim S_k^\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{p}(\Omega_i,\ \Delta_i)\Big) = \binom{k+2}{2} + \Big(\sum_{i=1}^{p} L_i + L_\delta\Big)\binom{k-\mu+1}{2} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{N_i} d_k^\mu(n_j) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_\delta} d_k^\mu(n_i) = \sum_{i=1}^{N}\dim S_k^\mu(\Omega_i,\ \Delta_i) + \sum_{i=1}^{N_\delta} d_k^\mu(n_i) + L_\delta\binom{k-\mu+1}{2} - (p-1)\binom{k+2}{2}.$$

最后，定义以下三个指标集：

$P = \{p:\ \min i - 1 \leq p \leq \max i,\quad x - i = 0 \in (D_N,\ \Delta_I)\}$

$Q = \{q:\ \min j - 1 \leq q \leq \max j,\quad y - j = 0 \in (D_N,\ \Delta_I)\}$

$T = \{t:\ \min k - 1 \leq t \leq \max k,\quad x - y - k = 0 \in (D_N,\ \Delta_I)\}$

二、$S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$ 的维数与基底

定理 2 设$D_N \subset \mathbf{R}^2$是简单的，Δ_I是$\mathbf{R}^2$上I-型均匀三角剖分，则

（i）$\dim S_4^2(D_N,\ \Delta_I) = \mathrm{Num}\,\Omega(D_N) + L + 3$

（ii）$\{B_{ij}(x,y):(i,j)\in\Omega(D_N)\}\cup\{(x-p)_+^4,\ (y-q)_+^4,\ (x-y-t)_+^4:\ p\in D,\ q\in Q,\ t\in T\}$ 是$S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$的一组基，其中L是（$D_N,\ \Delta_I$）中贯穿线的根数.

当$D_N = R_{mn} = [0,\ m]\otimes[0,\ n]$，$\Delta_I = \Delta_{mn}^{(1)}$时，此定理与〔1〕中定理3.1一致.

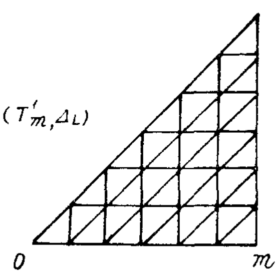
证明 我们可采取以下步骤：1. 设$D_N = T_m$（$T_m \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x,\ y):\ 0 < x < m,\ 0 < y < x\}$，或$\{(x,\ y): 0 < x < m,\ x < y < m\}$），$\widetilde{T}_n$（$\widetilde{T}_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x,\ y):\ 0 < x < n,\ 0 < y < 1 - x\}$，或$\{(x,\ y):\ 0 < x < n,\ 1 - x < y < n\}$）. 2. 设$D_N = \bigcup\limits_{r,s} R_{rs}$(但要保证简单性). 3. 设$D_N = (\bigcup\limits_i T_i)\cup(\bigcup\limits_j \widetilde{T}_j)\cup(\bigcup\limits_{r,s} R_{rs})$（保证简单性）. 整个证明过程以定理1为基础. 且各步证法相同. 因此，我们仅以$D_N = T_m$的情形证明之.

用T_m^1表示T_m的第一种情形. T_m^2表示T_m的第二种情形.

根据定理1，

$$\dim S_4^2(T_m^1,\ \Delta_I) = \binom{6}{2} + 3(m-1)\binom{3}{2} + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

$$= \frac{1}{2}(m^2 + 15m + 14),$$

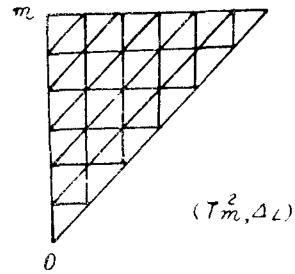


而$\Omega(T_m^1) = \{(i,\ j):\ i = -2, \cdots,\ m+1;\ j = -1,\ \cdots,\ i+1\}\setminus\{(-2,\ -1),\ (m+1,\ -1),\ (m+1,\ m+2)\}$，因此$\mathrm{Num}\,\Omega(T_m^1) = \frac{1}{2}(m+4)(m+5) - 3 = \frac{1}{2}(m^2 + 9m + 14)$，又$L = 3(m-1)$. 从而

$$\dim S_4^2(T_m^1,\ \Delta_I) = \mathrm{Num}\,\Omega(T_m^1) + L + 3.$$

另外，根据定理1，

$\dim S_4^2(T_m^2,\ \Delta_I)=\frac{1}{2}(m^2+15m+14)$，



$\Omega(T_m^2)=\{(i,\ j):\ i=-1,\ \cdots,\ j+1;\ j=-2,\ \cdots,\ m+1\}\setminus\{(-1,\ -2),\ (-1,\ m+1),\ (m+2,\ m+1)\}$，且 $L=3(m-1)$，则 $\mathrm{Num}\,\Omega(T_m^2)=\frac{1}{2}(m^2+9m+14)=\dim S_4^2(T_m^2,\ \Delta_I)-L-3$．

现在证明结论（ii）．首先注意到 $\{B_{ij}(x,\ y):\ (i,y)\in\Omega(D_N)\}\cup\{(x-p)_+^4,\ (y-q)_+^4,\ (x-y-t)_+^4:\ p\in P,\ q\in Q,\ t\in T\}$ 中函数个数恰为 $\dim S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$．设 $D=[\min_{i\in I}i-1,\ \max_{i\in I}i+1]\otimes[\min_{j\in J}j-1,\ \max_{j\in J}j+1]$，　中 $I=\{i:\ x-i=0\in(D_N,\ \Delta_I)\}$，$J=\{j:\ y-j=0\in(D_N,\ \Delta_I)\}$.，则有 $D_N\subseteq D$.，根据〔1〕中定理3.1

$\{B_{ij}(x,\ y):\ (i,\ j)\in\Omega(D)\}\cup\{(x-p)_+^4,\ (y-q)_+^4,\ (x-y-t)_+^4:p\in P,q\in Q,\ t\in T\}$ 是 $S_4^2(D,\ \Delta_I)$ 的一组基．由于 $\{B_{ij}(x,\ y):\ (i,\ j)\in\Omega(D_N)\}\subseteq\{B_{ij}(x,\ y):(i,\ j)\in\Omega(D)\}$，则 $\{B_{ij}(x,\ y):((i,\ j)\in\Omega(D_N))\}\cup\{(x-p)_+^4,\ (y-q)_+^4,\ (x-y-t)_+^4:\ p\in P,\ q\in Q,\ t\in T\}$ 是线性无关函数组．因此它是 $S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$ 的一组基．

下面给出一个反例，说明 R^2 中非简单的标准多边形区域 D_N 上的样条空间 $S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$ 不再适合定理2．

例　设 $D_N=\bigcup_{t=1}^{r}R_t=\bigcup_{t=1}^{r}[m_{t-1},\ m_t]\otimes[0,\ n_t]$，$m_0\overset{\text{def}}{=}0$，$m_i<m_j$（$i<j$）$n_i<n_j$（$i<j$）．显然当 $r>1$ 时 D_N 不是简单性区域．根据定理1，可以算出

$$\dim S_4^2(\bigcup_{t=1}^{r}R_t,\ \Delta_I)=\mathrm{Num}\,\Omega(\bigcup_{t=1}^{r}R_t)+L+3+(r-1)\qquad(r\geq 1)$$

当 $r>1$ 时，$\{B_{ij}(x,\ y):\ (i,\ j)\in\Omega(\bigcup_{t=1}^{r}R_t)\}\cup\{(x-p)_+^4,\ (y-q)_+^4,\ (x-y-t)_+^4,\ :\ p=0,\ 1,\ \cdots,\ m_{r-1},\ q=0,\ 1,\ \cdots,\ n_{r-1},\ t\in T\}$ 仅是 $S_4^2(\bigcup_{t=1}^{r}R_t,\ \Delta_I)$ 的无关组，而不能成为基底，因为这时至少还缺少 $r-1$ 个函数作基元．如何求这 $r-1$ 个新基元？根据下面将要证明的定理，我们可知这 $r-1$ 个新基元均不具有最小支集．

定理 3　$\mathscr{B}=\{B_{ij}(x,\ y):$ 其支集全部落在 D_N 内$\}$ 是 $\mathrm{loc}S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$ 的唯一的 B-样条基．

证明　象定理2中一样，令 $D=[\min_{i\in I}i-1,\ \max_{i\in I}i+1]\otimes[\min_{j\in J}j-1,\ \max_{j\in J}j+1]$ 由于 $D_N\subseteq D$，根据〔1〕中引理3.1知，$\{B_{ij}(x,\ y):$ 其支集全部落在 D 内$\}$ 是 $\mathrm{loc}S_4^2(D,\ \Delta_I)$ 唯一的 B-样条基．根据 $\mathrm{loc}S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$ 的定义，不难计算 $\mathrm{Num}\,\mathscr{B}=\dim\mathrm{loc}S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$．又 $\mathrm{loc}S_4^2(D_N,\ \Delta_I)\subseteq\mathrm{loc}S_4^2(D,\ \Delta_I)$，则 $\mathscr{B}$ 是 $\mathrm{loc}S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$ 唯一的 B-样条基．

此定理表明 $S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$ 中不存在其它形状支集的B-样条，所以，$S_4^2(D_N,\ \Delta_I)$ 没有Frederickson样条基底．这个结论并非要求D_N为简单的区域．

三、有关进一步的性质

由于$S_4^2(D_N, \Delta_I)$不具有B-样条基，我们在此仅对真子空间$lS_4^2(D_N, \Delta_I) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{span}\{B_{ij}(x, y):(i, j)\in\Omega(D_N)\}$中的函数性质做一些讨论．容易证明$lS_4^2(D_N, \Delta_I)$依$\|\cdot\|_{C(D_N)}$成为一线性赋范空间．我们还可证明下述结果：

(i) $\sum\limits_{(i, j)\in\Omega(D_N)} B_{ij}(x, y)=1$

(ii) 对$\forall S(x, y)=\sum\limits_{(i, j)\in\Omega(D_N)} c_{ij}B_{ij}(x, y)\in lS_4^2(D_N, \Delta_I)$总有

$$\min_{(i, j)\in\Omega(D_N)}\{c_{ij}\}\le S(x, y)\le \max_{(i, j)\in\Omega(D_N)}\{c_{ij}\} \quad \forall (x, y)\in D_N.$$

(iii) 对$\forall S(x, y)=\sum\limits_{(i, j)\in\Omega(D_N)} c_{ij}B_{ij}(x, y)\in lS_4^2(D_N, \Delta_I)$，$\exists$常数$\widetilde{C}$，使对$\forall (p, q)\in\Omega(D_N)$，

$$|c_{pq}|\le \widetilde{C}\,\|\Sigma c_{ij}B_{ij}\|.$$

证明 因为有限维线性赋范空间与同维数的欧氏空间同构，所以有常数M，$\widetilde{M}$，使

$$M\|S\|\le \Big(\sum_{(i, j)\in\Omega(D_N)}|c_{ij}|^2\Big)^{1/2}\le M'\|S\|.$$

于是对$\forall (p, q)\in\Omega(D_N)$，总有

$$|c_{pq}|\le M'\|S\|.$$

(iv) 对$\forall S(x, y)=\sum\limits_{(i, j)\in\Omega(D_N)} c_{ij}B_{ij}(x, y)\in lS_4^2(D_N, \Delta_J)$，$m\overset{\text{def}}{=}\min\limits_{(x, y)\in D_N} S(x, y)$，$M\overset{\text{def}}{=}\max\limits_{(x, y)\in D_N} S(x, y)$，则$\exists$常数$\widetilde{C}$使

$$|c_{pq}-(M+m)/2|\le \widetilde{C}(M-m)/2 \quad \forall (p, q)\in\Omega(D_N).$$

(v) 对$\forall S(x, y)=\sum\limits_{(i, j)\in\Omega(D_N)} c_{ij}B_{ij}(x, y)\in lS_4^2(D_N, \Delta_I)$，$\exists$常数$\widetilde{C}$，使

$$\widetilde{C}^{-1}\max_{(i, j)\in\Omega(D_N)}\{c_{ij}\}\le\|S\|\le \max_{(i, j)\in\Omega(D_N)}\{|c_{ij}|\}$$

本文作者由衷地感谢熊振翔教授的指导．

参 考 文 献

〔1〕C. K. Chui and R. H. Wang, Spaces of bivariate cubic and quartic splines on type 1 triangulations, CAT# 20, July 1982.

〔2〕C. K. Chui and R. H. Wang, Multivariate spline spaces, CAT# 9, November 1981.