关于奇次插值样条收敛阶的一点注记*

王 翔

（浙江大学）

设Δ_n：$o=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，$f\in C^{m-1}[0,1]$，$S_{2m-1}(f,\Delta_n)$是以$\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$为单结点的$2m-1$次多项式样条，满足下列插值条件：

$$S_{2m-1}(f,\Delta_n)(x_i)=f(x_i),\qquad 0\leq i\leq n,$$
$$S_{2m-1}^{(j)}(f,\Delta_n)(x_i)=f^{(j)}(x_i),\quad i=0,n,\ 1\leq j\leq m-1,$$

deBoor在〔1〕中说明了$S_{2m-1}(f,\Delta_n)$是存在且唯一的，并且对于$m=3$给出了Jackson型估计：

$$\|f-S_{2m-1}(f,\Delta_n)\|\leq C\overline{\Delta}_n^m\omega(f^{(m)},\overline{\Delta}_n)\qquad(1)$$

这里$\overline{\Delta_n}=\max(x_i-x_{i-1})$，$C$是仅与$m$和分划比有关的常数，$\|\cdot\|$表示连续函数空间的范数。其实，利用〔2〕的结果可说明上式对任意m都成立。但这一估计式并不完美，因为插值问题仅要求$f\in C^{m-1}[0,1]$，而估计式右端却出现$f^{(m)}$的连续模。一个很自然的问题是能否用$f^{(m-1)}$的连续模，甚至用f的更低次导函数的高阶光滑模来估计$\|f-S_{2m-1}(f,\Delta_n)\|$，本文引进插值$K$-泛函的概念，圆满地解决了这一问题，证得：

定理 设$m\geq2$，则有

$$\sup_{\substack{f\in C^{m-1}[0,1]\\ \Delta_n}}\frac{\|f-S_{2m-1}(f,\Delta_n)\|}{\overline{\Delta}_n^{m-1}\omega_{m+1}(f^{(m-1)},\overline{\Delta}_n)}<+\infty,\qquad(2)$$

$$\sup_{f\in C^{m-1}[0,1]}\frac{\|f-S_{2m-1}(f,\Delta_n)\|}{\overline{\Delta}_n^{j}\omega_{2m-j}(f^{(j)},\overline{\Delta}_n)}=+\infty,\quad 0\leq j\leq m-2.\qquad(3)$$

在本文中，$\overline{\Delta}\triangleq\max(x_i-x_{i-1})$，$\Delta\triangleq\min(x_i-x_{i-1})$，$S_n$表示$S_{2m-1}(f,\Delta_n)$，$C_k(k=1,2\cdots)$表示仅与$m$和分划比有关的常数，并且设$\Delta_n$的分划比一致有界。

引理 1 设$f\in C[0,1]$，$a,b,c\in[0,1]$，则存在k次多项式P，$k\geq2$，满足$P(a)=f(a)$，$P(b)=f(b)$，$P(c)=f(c)$，且$\|p-f\|\leq C_1\omega_{k+1}(f,1)$，$C_1$与$k,a,b-a,c-b$，$1-c$有关.

引理 2 设$f\in C^{m-1}[0,1]$，$a,b\in[0,1]$，$k\geq m+1$，则存在二个k次多项式p_1和p_0满足：$p_1(a)=p_0(a)=f(a)$，$p_1(b)=p_0(b)=f(b)$，$p_i^{(j)}(i)=f^{(j)}(i)$，$i=0,1$，$0\leq j\leq m-1$，且有$\|f-p_i\|\leq C_2\omega_{k-m+2}(f^{(m-1)},1)$，$i=0,1$，这里$C_2$与$k,a,b-a$，$1-b$有关.

这二个引理的证明方法是类似的，我们只给出后者的证明.

记$B_f\triangleq\{P\mid P$是k次多项式，$p(a)=f(a)$，$p(b)=f(b)$，$p^{(j)}(0)=f^{(j)}(0)$，$0\leq j\leq m-1\}$，这是$k+1$维空间中的凸集．考虑索伯列夫模$\|g\|_s=\sum_{j=0}^{m-1}\|g\|_s$，则存在$P_f\in B_f$，使得

* 1984年 5 月 5 日收到.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$\| f - p_f \|_s = \min\limits_{p \in B} \| f - p \|_s$.

记q_f是B_f中的某个$m+2$次多项式．从插值条件所决定的线性方程组中可看到q_f存在且唯一，$\|q_f\|_s \le C_3 \|f\|_s$．由此得$\|f - q_f\|_s \le (c_3+1)\|f\|_s$，从而有$\|f - p_f\|_s \le (c_3+1)\|f\|_s$．设$k$次多项式$q$满足：

$$\|f - q\|_s \le C_4 \omega_{k-m+2}(f^{(m-1)}, 1).$$

$q + p_{f-q} \in B_f$，$p_f - q \in B_{f-q}$，因而$\|f - q - p_{f-q}\|_s = \min\limits_{p \in B_f} \|f - p\|_s$，从而有：$\|f - p_f\| \le \|f - p_f\|_s = \|f - q - p_{f-q}\|_s \le (C_3+1)\|f - q\|_s \le C_4(C_3+1)\omega_{k-m+2}(f^{(m-1)}, 1)$．令$p_0 = p_f$，用同样方法可证明$p_1$的存在性，引理２得证．

引理３　（〔３〕引理2、3）．设p_1和p_0是二个k次多项式，$d = 4(k+2)^2$，则存在以$\{\frac{i}{d}\}_{i=1}^{d-1}$为单结点的$k$次多项式样条$S$．$S$夹在$p_1$和$p_0$之间，且满足$s^{(j)}(i) = p_i^{(j)}(i)$，$i = 0, 1$，$0 \le j \le k-1$．

设$f \in C^{m-1}[0,1]$，记$A(f, \Delta_n) \triangleq \{g \in L_\infty^{2m}[0,1] \mid f(x_i) = g(x_i)$，$0 \le i \le n$，$g^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$，$1 \le j \le m-1$，$i = 0, n\}$，这里$L_\infty^{2m}[0,1]$表示在〔0，1〕上有$2m-1$次绝对连续的导函数，其$2m$次导函数是本性有界的函数全体．我们如下定义插值$K$一泛函，$K_{2m}^*(f, \overline{\Delta}) = \inf\limits_{g \in A(f, \Delta_n)} \{\|f - g\| + \overline{\Delta}^{2m} \|D^{2m} g\|\}$．再说明二个分划是等价的概念，设二个有一致有界的分划比的分划$\Delta_{n_1}^1$：$0 = x_{10} < \cdots < x_{n_1} = 1$，$\Delta_{n_2}^2$：$0 = x_{20} < \cdots < x_{2n_2} = 1$，满足$C_5 \min(x_{1i} - x_{1i-1}) \le \min(x_{2i} - x_{2i-1}) \le \max(x_{2i} - x_{2i-1}) \le C_6 \max(x_{1i} - x_{1i-1})$，则称$\Delta_{n_1}^1$与$\Delta_{n_2}^2$等价．

引理４　$K_{2m}^*(f, \overline{\Delta}) \le C_7 \Delta^{m-1} \omega_{m+1}(f^{(m-1)}, \overline{\Delta})$．

证明　首先用归纳法定义一个$2m$次样条函数$S(f)$，满足如下条件：

a）$S(f) \in A(f, \Delta_n)$．

b）$S(f)$的结点与S_f的结点分别构成的二个分划是等价的．

c）$\|f - S(f)\| \le C_8 \overline{\Delta}^{m-1} \omega_{m+1}(f^{(m-1)}, \overline{\Delta})$．

记$I_i = [x_i, x_{i+1}]$，$0 \le i \le n-1$，设〔a, b〕是〔0，1〕中的子区间，$\omega_{m+1}(g, t, [a, b]) \triangleq \sup\{\|\Delta_h^{m+1} \tilde{g}(0)\| \mid h \le \min(t, b-a)\}$，这里$\tilde{g}$表示$g$在〔$a, b$〕上的限制，$\Delta_h^{m+1}$表示步长为$h$的$m+1$阶差分算子．由引理２得到$2m$次多项式$p_0$满足

1）$p_0^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$，$0 \le j \le m-1$，$p_0(x_i) = f(x_i)$，$i = 1, 2$．

2）$\|p_0 - f\|_{I_0 \cup I_1} \le C_2 \overline{\Delta}^{m-1} \omega_{m+1}(f^{(m-1)}, \overline{\Delta}, I_0 \cup I_1)$．

这里$\|\cdot\|_I$表示在I上取一致模．在I_0上我们定义$S = P_0$．注意到１）与２），我们可以作这样的归纳假设，设S在$J_k \triangleq \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} I_i$上已定义完毕，$S$满足以下四个条件：

3）$S^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$，$0 \le j \le m-1$；$S(x_i) = f(x_i)$，$1 \le i \le k$．

4）S在J_k中的结点构成了J_k的分划，这分划与Δ_n在J_k上是等价的．

5）存在$2m$次多项式p_k，p_k在x_k点与S是$2m-1$次光滑连接，$p_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$，而且有$\|f - p_k\|_{I_k} \le C_1 \overline{\Delta}^{m-1} \omega_{m+1}(f^{(m-1)}, \overline{\Delta}, I_{k-1} \cup I_k)$．

6）$\|f - s\|_{J_k} \le C_9 \overline{\Delta}^{m-1} \omega_{m+1}(f^{(m-1)}, \overline{\Delta}, J_k \cup I_k)$．

下面我们来定义S在I_k上的值，先设$k < n-1$．由引理１得知，存在$2m$次多项式$\tilde{p}_k$，满足插值条件$\tilde{p}_k(x_i) = f(x_i)$，$i = k, k+1, k+2$，且有

$$\|f - \tilde{p}_k\|_{I_k \cup I_{k+1}} \le C_1 \overline{\Delta}^{m-1} \omega_{m+1}(f^{(m-1)}, \overline{\Delta}, I_k \cup I_{k+1}).$$

由引理３得知，存在I_k上亏度为１的$2m$次样条S_k，在x_k点与p_k $2m-1$次光滑连接，在x_{k+1}点

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

与$\widetilde{P}_k$是$2m-1$次光滑连接，特别重要的是S_k夹在P_k与$\widetilde{P}_k$之间，我们在I_k上定义$S=S_k$，则S在$J_{k+1}=J_k\cup I_k$上满足条件3），4），5）和6），自然这时诸条件中出现k的地方用$k+1$代之．若$k=n-1$时，我们由引理2来确定$\widetilde{P}_k$，同样可定义S在I_{n-1}上的值．比较条件3）—6）与条件a)，b)，c)便知，如此确定的S一定满足a)，b)和c)．记S为$S(f)$．

设$S(f)$的结点是$0=t_0<t_1<\cdots<t_e=1$，$h=\min(t_i-t_{i-1})$，对于$t\leq \underline{h}/2m$时，由于$S(f)$是分段m次多项式，所以有下式成立：$\|D^{2m}S(f)\|\leq C_{10}\underline{h}^{-2m}\|\Delta_t^{2m}S(f)\|$．又由条件C）得到：$\|\Delta_t^{2m}S(f)\|\leq C_{11}[\overline{\Delta}^{m-1}\omega_{m+1}(f^{(m-1)},\overline{\Delta})+\underline{h}^{m-1}\omega_{m+1}(f^{(m-1)},\underline{h})]$，注意到条件b)，则从上面二式可得

$$\overline{\Delta}^{2m}\|D^{2m}S(f)\|\leq C_{12}\overline{\Delta}^{m-1}\omega_{m+1}(f^{(m-1)},\overline{\Delta}),$$

结合条件a）和c）便证得到理4．

若记　$_n$是以$\{x_i\}$为单结点的$2m-1$次多项式样条全体，在〔1〕中，deBoor讨论了一种拟插值算子Q，它是C〔0，1〕到S_n的有界线性投影算子，其范数与n无关，且有

$$\|(f-Qf)^{(j)}\| C_{13}\omega_{2m-j}(f^{(j)},\overline{\Delta}).\quad 0\leq j\leq 2m-1.$$

（2）式的证明 由引理4得到$g_0\in A(f,\Delta_n)$，使得

$$\|f-g_0\|+\overline{\Delta}^{2m}\|D^{2m}g_0\|\leq 2K^*_{2m}(f,\overline{\Delta})\leq 2C_1\overline{\Delta}^{m-1}\omega_{m+1}(f^{(m-1)},\overline{\Delta}),$$

$$\begin{aligned}\|g_0-S_{g_0}\|&=\|g_0-Qg_0-S_f-Qg_0\|\leq C_{14}\overline{\Delta}^m\omega((g_0-Qg_0)^{(m)},\overline{\Delta})\\&\leq 2C_{14}C_{13}\overline{\Delta}^m\omega_m(g_0^{(m)},\overline{\Delta})\leq 2C_{14}C_{13}\overline{\Delta}^{2m}\|D^{2m}g_0\|\\&\leq 4C_{14}C_{13}C_7\overline{\Delta}^{m-1}\omega_{m+1}(f^{(m-1)},\overline{\Delta}),\end{aligned}$$

这里第一个不等式用到了（1）式．由插值样条的唯一性得$S_{g_0}=S_f$，从而有

$$\|f-S_f\|=\|f-S_{g_0}\|\leq\|f-g_0\|+\|g_0-S_{g_0}\|\leq C_{15}\overline{\Delta}^{m-1}\omega_{m+1}(f^{(m-1)},\overline{\Delta}).$$

（2）式得证．

（3）式的证明 我们用反证法．若设存在某个j．$0\leq j\leq m-2$，使得：$\|f-S_f\|\leq C_{16}\overline{\Delta}^j\omega_{2m-j}(f^{(j)},\Delta)$．

对于$S\in S_n$，成立Markoff不等式$\|D^kS\|\leq C_{17}\overline{\Delta}^{-k}\|S\|$，$0\leq k\leq 2m-1$，再注意到$f-S_f=f-Qf+Qf-Qf_f$，我们有

$$\begin{aligned}\|(f-S_f)^{(j)}\|&\leq\|((f-Qf)^{(j)}\|+\|Q^{(j)}(f-S_f)\|\\&\leq\|(f-Qf)^{(j)}\|+C_{17}\overline{\Delta}^{-j}\|f-S_f\|\cdot\|Q\|\\&\leq C_{18}\omega_{2m-j}(f^{(j)},\overline{\Delta}).\end{aligned}\tag{4}$$

记$a\triangleq C_{17}^2\overline{\Delta}^{-2}+C_{17}\overline{\Delta}^{-1}$，$\varepsilon\triangleq a^{-1}$，$P_\varepsilon(x)\triangleq(x-\varepsilon)^{m-j}x$，则有$|P_\varepsilon'(0)|=\varepsilon^{m-j}$，记

$$g(x)\triangleq\begin{cases}0 & x\in[0,\varepsilon]\\P_\varepsilon(x) & x\quad[\varepsilon,1]\end{cases},\text{ 则}$$

$$\|P_\varepsilon-g\|=\max_{x\in[0,\varepsilon]}|P_\varepsilon(x)|\leq\varepsilon^{m-j+1}$$

所以有$\|P_\varepsilon-g\|\leq a^{-1}|P_\varepsilon'(0)|$．

记$f_n(x)=\dfrac{1}{(j-1)!}\displaystyle\int_0^x(x-y)^{j-1}g(y)\mathrm{d}y$，由$g\in C^{m-j-1}[0,1]$得到$f_n\in C^{m-1}[0,1]$，且$f_n^{(j)}(x)=g(x)$．

$$\omega_{2m-j}(f_n^{(j)},\overline{\Delta})=\omega_{2m-j}(g-P_\varepsilon,\overline{\Delta})\leq C_{19}\|g-P_\varepsilon\|.$$

$$|P_\varepsilon'(0)|\quad|P_\varepsilon'(0)-g'(0)|=|P_\varepsilon'(0)-S_{f_n}^{(j+1)}(0)|\leq C_{17}\overline{\Delta}^{-1}\|P_\varepsilon-S_{f_n}^{(j)}\|\leq$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$C_{17}\bar{\Delta}^{-1}(\|P_\varepsilon - g\| + \|g - S_{f_n}^{(j)}\|).$$

又有 $\quad |P'_\varepsilon(0)| \geq a\|P_\varepsilon - g\| = (C_{17}^2\bar{\Delta}^{-2} + C_{17}\bar{\Delta}^{-1})\|P_\varepsilon - g\|,$

所以 $\quad \|f_n^{(j)} - S_{f_n}^{(j)}\| = \|g - S_{f_n}^{(j)}\| \geq C_{17}\bar{\Delta}^{-1}\|P_\varepsilon - g\|.$

从而有

$$\frac{\|(f_n - S_{f_n})^{(j)}\|}{\omega_{2m-j}(f_n^{(j)}, \bar{\Delta})} \geq \frac{C_{17}}{C_{19}}\bar{\Delta}^{-1}.$$

当$\bar{\Delta}$充分小时，此式与（4）式矛盾．至此，定理完全得证．

本文的方法对于更复杂的插值问题也是适用的．最后，作者对于郭竹瑞教授的热情指导表示感谢．

参 考 文 献

[1] deBoor, C., On the Convergence of odd—degree Spline Interpolation, J. Appro. Theo, Vol. 1, P452—463.

[2] Demko, S., Local Approximation Properties of Spline Projections, J. Appro. Theo, Vol. 12, 261.

[3] Beatson, R. K., Restricted Range Approximation by Spline and Variational Inequalities, SIAMJ, Numer. Anal, Vol. 19, P372—380.

A note on the convergence of odd-degree Spline interpolation

Wang Xiang

(Zhejiang University)

Abstract

In [1] deBoor discussed odd-degree spline interpolation. He obtained Jackson's estimate $\|f - S_{2m-1}(f, \Delta_n)\| \leq C\bar{\Delta}_n^m \omega(f^{(m)}, \bar{\Delta}_n)$ for $f \in C^m[0, 1]$. In this paper we improve this result in terms of interpolation K-functional. We obtain $\|f - S_{2m-1}(f, \Delta_n)\| \leq C\bar{\Delta}_n^{m-1}\omega_{m+1}(f^{(m-1)}, \bar{\Delta}_n)$ for $f \in C^{m-1}[0, 1]$, Here $\omega_{m+1}(f^{(m-1)}, \bar{\Delta}_n)$ can not be replaced by the $(2m-j)$-th order modulus of smoothness of $f^{(j)}$, with $0 \leq j \leq m-2$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.