1987年8月

数学研究与评论
第七卷 第三期

可亚正规化的算子*

杜鸿科

（陕西师范大学数学系）

最近，Ky Fan在〔1〕中就有限维希尔伯特空间引进了所谓可正规化算子的概念，考察了这类算子的一系列特征，其实在〔1〕中给出的可正规化算子的概念推广到无限维的Hilbert空间时，所列出的绝大部分特征也是成立的，希氏空间H上的线性有界算子T称为可正规化的，是指存在H上的可逆算子S，使S^*TS是正规算子．

现在我们给出如下定义：H上的线性算子T称为是可亚正规化的，是指存在H上的可逆算子S，使S^*TS是亚正规的。即

$$S^*T^*SS^*TS\geq S^*TSS^*T^*S.$$

显然，亚正规算子是可亚正规化算子，而反之则不然．

下面我们来讨论一下可亚正规算子的一些特征和性质．

对H上任一有界线性算子（以下简称“算子”）T，记其直角分解为$T=A+iB$．

定理1 对算子$T=A+iB$，下列条件等价

（1） T是可亚正规化的；

（2） 存在正定算子P，使$T^*PT\geq TPT^*$；

（3） 存在正定算子Q，使$\|QTx\|\geq\|QT^*x\|$，$\forall x\in$ H；

（4） 存在正定算子P，使$i(APB-BPA)\geq 0$；

（5） 存在正定算子P，使$T^*PT\geq APA+BPB$；

（6） 存在亚正规算子H和正定算子P，使$T=PHP$；

（7） 存在正定算子Q，使QTQ是亚正规的．

证明 （1）⇒（2）根据定义存在可逆算子S，使得$S^*T^*SS^*TS\geq S^*TSS^*T^*S$，在不等式两边同时左乘以$S^{*-1}$，右乘以$S^{-1}$，得

$$T^*SS^*T\geq TSS^*T^*.$$

在上式中，取$P=SS^*$就有$T^*PT\geq TPT^*$．

（2）⇒（3）：取$Q=P^{1/2}$，就有$\|QTx\|\geq\|QT^*x\|$，$\forall x\in$ H．

（3）⇒（1）：显然．

对正定算子P，$T^*PT-TPT^*=2i(APB-BPA)$，从而（2）⇔（4）．

由于$T^*PT=APA+BPB+i(APB-BPA)$，从而（4）⇔（5）．

（5）⇒（7）：取$Q=P^{1/2}$，分别以$P^{1/2}$左、右乘不等式$T^*PT\geq APA+BPB$的两边得

$$P^{1/2}T^*P^{1/2}P^{1/2}TP^{1/2}\geq P^{1/2}AP^{1/2}P^{1/2}AP^{1/2}+P^{1/2}BP^{1/2}P^{1/2}BP^{1/2}$$

---

* 1981年5月3日收到．

这说明$P^{1/2}TP^{1/2}$，即QTQ是亚正规的．

（6）$\Leftrightarrow$（7）显然，（7）$\Rightarrow$（1）显然．证毕．

定理2 若T是可亚正规化的，则它具有下列性质．

（1） 若T可逆，则T^{-1}也是可亚正规化的，且$T^{*-1}T$相似于一压缩算子；

（2） 若T、T^*的零空间分别记为$N(T)$和$N(T^*)$，则有$N(T)\subset N(T^*)$；

（3） 若T、T^*的值域分别记为$R(T)$和$R(T^*)$，则有$R(T)\subset R(T^*)$．

（4） T的升标为0或1．

证明 （1）由定义知存在可逆算子S，使S^*TS是亚正规的，而由〔2〕其逆$(S^*TS)^{-1}=S^{-1}T^{-1}S^{*-1}$也是亚正规的，则由定义知$T^{-1}$是可亚正规化的．而当$S^*TS$是亚正规算子时$C=(S^*TS)^{*-1}(S^*TS)$是一压缩算子〔3〕，则$T^{*-1}T=S^{-1}CS$．

（2） 由定理1的（3），这是显然的．

（3） 由于存在可逆算子S，使S^*TS是亚正规的，则有$R(S^*TS)\subset R(S^*T^*S)$．从而，$\forall x\in H$，存在$y\in H$，使得$S^*TSx=S^*T^*Sy$．注意到$S^*$可逆，有$TSx=T^*Sy$，这说明$R(T)\subset R(T^*)$．

（4） 仅需证$T^2x=0$时必有$Tx=0$即可．由（3）存在$y\in H$使得$Tx=T^*y$，从而$TT^*y=0$，但这时只有$T^*y=0$，即$Tx=0$．证完．

命题3 若算子$T=A+iB$是可亚正规化的，则对任意实数α、β、γ、δ，当$\alpha\delta-\beta\gamma\geq 0$时，算子$S=(\alpha A+\beta B)+i(\gamma A+\delta B)$也是可亚正规化的．

证明 由于T是可亚正规化的，则存在正算子P，使$i(APB-BPA)\geq 0$，而

$$(\alpha A+\beta B)P(\gamma A+\delta B)-(\gamma A+\delta B)P(\alpha A+\beta B)$$

$$=\beta\gamma BPA+\alpha\delta APB-\gamma\beta APB-\delta\alpha BPA=(\alpha\delta-\beta\gamma)(APB-BPA).$$

从而，由定理1的（4）知S是可亚正规化的．证毕．

上列各事实说明可亚正规化算子是和亚正规算子具有十分类似的性质，但它们之间是有本质不同的．若H是亚正规的，$\forall\lambda\in C$，$H-\lambda$是亚正规的．但T是可亚正规的，一般$T-\lambda$不再是可亚正规的．然而有如下事实

命题4 （1）对任意算子$T=A+iB$，若$O\bar{\in}\overline{W(T)}$，则$T$是可正规化的，其中$W(T)=\{(Tx,x):\ \|x\|=1\}$

（2） 对任意算子$T=A+iB$，存在正数$M>0$，使对任意复数z，只要$|z|\geq M$，则$T-z$是可正规化的．

证明（1）由于$O\bar{\in}\overline{W(T)}$，则存在复数$e^{i\theta}$，使$e^{i\theta}T$有正实部，由〔1〕知$e^{i\theta}T$是可正规化的，从而$T$是可正规化的．

（2） 取$M=(\|A\|^2+\|B\|^2)^{1/2}+1$，则只要$|z|\geq M$，显然有$O\bar{\in}\overline{W(T-z)}$，由（1）知$T-z$是可正规化的．

回忆〔1〕中所谓定型对的定义：若A、B是自共轭算子，且$\inf\limits_{\|x\|=1}|((A+iB)x,x)|>0$，则称（$A$, B）为定型对，命题4的（1）说明了：若（A, B）为定型对，则$A+iB$是可正规化的．

我们知道正规算子有丰富的不变子空间，下面的事实为我们提供了可正规化的算子的不变子空间的信息．

若正规算子M、N的谱分解分别为$M=\int \lambda dE_\lambda$、$N=\int \zeta dF_\zeta$，且分别存在Borel集$\delta$、$\Delta$，使得$E(\delta)=F(\Delta)\neq 0$，则称$M$、$N$有相同的谱子空间，我们有下列命题。

命题5 若有可逆算子S，使S^*TS是正规的，且S^*TS和S^*S有相同的谱子空间，则T有不变子空间。

证明 设S^*TS和S^*S的谱测度分别为$E(\cdot)$和$F(\cdot)$，则存在Borel集δ、Δ，使$E(\delta)=F(\Delta)\neq 0$。由谱定理知$S^*SF(\Delta)\subseteq F(\Delta)$，且$(S^*S)^{-1}F(\Delta)\subseteq F(\Delta)$，从而$S^*SF(\Delta)=F(\Delta)$，也就是$SF(\Delta)=S^{*-1}F(\Delta)$。

另一方面$S^*TSE(\delta)\subseteq E(\delta)$，所以$TSE(\delta)\subseteq S^{*-1}E(\delta)$，也就是$TSF(\Delta)\subseteq SF(\Delta)$。而$SF(\Delta)$显然是非零的闭子空间。即$SF(\Delta)$是$T$的非平凡不变子空间。证毕。

参考文献

[1] Ky Fan, Normalizable operators, Linear Algebra and Appl., Vol 52-53(1983), 253-263.

[2] Stampfli, J. G., Hyponormal operators and spectral density, Trans. Amer. Math. Soc., 117(1965), 469-476.

[3] 严绍宗，关于极·积算子不^1A，数学年刊，Vol 1.3-4(1980)，485—499.

[4] Stewart, G. W., Perturbation bourds for the definite generallzed elgenalue problem, Linear Algebra and Appl., Vol. 23(1979), 69—85.

Hyponormalizable Operators

Du Hongke

(Shanxi Normal University)

Abstract

In [1], Ky Fan introduces the class of normalizable operators.

In this note, we introduce the class of hyponormalizable operators. An operator T on a Hilbert space H is called hyponormalizable if there is a invertible operator S on H such that S^*TS is hyponormal. We consider some characterizations and properties of hyponormalizable operators.