椭球对称性检验*

邓　炜　材
（暨南大学，广州）

提要：球对称分布为其同阶矩的比所刻划，自然地就用一系列样本矩来检验球对称性．沿此途径，我们导出关于X为椭球对称分布的假设检验，分别讨论了$E\,X$与$\mathrm{Var}X$为已知或未知的情形．

§0　引言与记号

椭球对称分布（包括多元正态分布）是多元统计分析的基本分布．检验椭球对称性是多元分析的基本问题之一．在§1，我们阐述了球对称分布的矩比例刻划，在§2，阐述了球对称分布的矩法检验；在§3，阐述了期望与互差阵均未知时椭球对称性的显著性检验．与常用显著性检验概念有所不同的是：所给检验方法不单拒收时有显著（差异）的理由，由分布的矩确定性质，当检验的矩阶渐渐增高，并且导致承认假设，则其理由也逐渐变得充分．

下面约定，大写拉丁字母X、Y、Z、U等均表示$p\times 1$随机列向量（带下标与否）；分量用相同的小写字母表示．例如

$$X=(x_1,\ \cdots,\ x_p)',$$
$$X_i=(x_{1i},\ \cdots,\ {}_{pi})'.$$

大写字母H，K，S，V等表示$1\times p$维非负整标常向量．分量用相同的小字母表示，例如

$$V=(v_1,\cdots,v_p).$$

又，$l_j=(0,\cdots,1,0,\cdots,0)$是第$j$元为1其余为0的$1\times p$常向量．$|V|=v_1+\cdots+v_p$．

$$X^V=x_1^{v_1}\cdots x_p^{v_p},\qquad \text{余仿此.}$$
$$\mu_V^X=EX^V.$$

U满足　　$U'U=1$．

关于样本的记号有：（余仿此）

X_1，　X_n为X的$i.i.d.$样本，$\overline{X}=(x_1\cdots,x_p)=\frac{1}{n}\sum X_i$，

$$a_V^X=\frac{1}{n}\sum X_i^V,\qquad m_V^X=\frac{1}{n}\sum(X_i-\overline{X})^V$$

$$m_{ij}^X=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}-\bar{x}_{i.})(x_{jk}-\bar{x}_{j.}),\qquad {}_X=(m_{ij}^X)_{p\times p}.$$

§1　球对称分布的矩刻划

我们称X（的分布）是矩确定的，如果1）X具有有限的各阶矩，2）没有另外的分布，

* 1985年12月20日收到．

它的各阶矩全同於X的。

X的分布为$C'X$（$C\in\mathbf{R}^p$）分布的全体所决定．而一元r.v．x具有解析的c．f．时，它是矩确定的充要条件是$\sum\frac{Ex^n}{n!}u^n$具有正的收敛半径，因而正态分布与一切有界分布均为矩确定的，并推知一切多元正态分布及多元的有界分布均为矩确定的．

定理一 （球对称分布的矩刻划） 各阶矩均有限的球对称分布族中同阶矩的比例是不变的．反之，若X的各同阶矩的比例相同于$\mathcal{N}(0, I_p)$的，则存在一个球对称分布具有与X相同的各阶矩；若$R^2\triangleq X'X$还是矩确定的，则X本身就是球对称的．

证 $X=(X'X)^{\frac{1}{2}}\cdot X/(X'X)^{\frac{1}{2}}\triangleq RU$，$U'U=1$．$X$为球对称分布的定义是：1）$U$在$U'U=1$上均匀分布；2）$U$与$R$相互独立．由此及矩确定的概念易证结果，从略．

例一 设$X\sim\mathcal{N}(0, I_p)$，$R^2=X'X$，则

$$\mu^X_{2s}=\prod_{j=1}^{p}(2S_j-1)!!^{*)}\text{，其它情况}\mu^X_H=0\text{，}\tag{1.1}$$

$$ER^{2\nu}=p(p+2)\cdots(p+2\nu-2)\triangleq\mu'_\nu\text{，}\tag{1.2}$$

故得

$$\mu^U_{2S}=\mu^X_{2S}/\mu'_{|s|}\text{，其它情况}\mu^U_H=0\text{．}\tag{1.3}$$

例二 球对称的X若具分布密度，则必具形式$f(x'x)$，对应的R具密度

$$g(r)=\frac{2\pi^{(p/2)}}{\Gamma(p/2)}r^{p-1}f(r^2)\text{．}$$

设$\varphi(u)=u^{m-1}\exp\{-\upsilon u^s\}$，$2m+p>2$；$\upsilon, s>0$，则$C_p\,\varphi(x'x)$是球对称分布密度，其中

$$C_p=s\pi^{-p/2}\upsilon^{(2m+p-2)/2s}\cdot\Gamma(p/2)/\Gamma\left(\frac{2m+p-2}{2s}\right)\text{．}$$

这时，$g(r)=\widetilde{C}_p r^{2m+p-3}\exp\{-\upsilon r^{2s}\}$，其中$\widetilde{C}_p=2s\upsilon^{(2m+p-2)/2s}/\Gamma\left(\frac{2m+p-2}{2s}\right)$．

通过计算可得 $ER^k=\widetilde{C}_p/\widetilde{C}_{p+k}=\upsilon^{-k/2s}\Gamma\left(\frac{2m+p+k-2}{2s}\right)/\Gamma\left(\frac{2m+p-2}{2s}\right)$．

$\mathcal{N}(0, I_p)$情形即$m=s=1$，$\upsilon=1/2$的情形．$s\geq 1$的情形是矩确定的，$s<1$的则否．

设$f(u)=(1+u/s)^{-m}$；$m>p/2$，$s>0$，则$C_pf(x'x)$是一类球对称分布密度，其中$C_p=(\pi s)^{-p/2}\Gamma(p)/\Gamma(m-p/2)$．这时$R$具分布密度

$$g(r)=\frac{2\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2)}r^{p-1}\cdot C_p(1+r^2/s)^{-m}\text{．}$$

于$m>(p+k)/2$时，由计算得

$$ER^k=s^{k/2}\frac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{p+k}{2}\right)}{\Gamma(p+k)\Gamma(n-p/2)\Gamma(p/2)}\text{．}$$

更高阶的矩便是无穷大． ∎

同一阶数的矩的比还可细分为若干类，据（1.1）我们可算出这些比在球对称分布类中的值．例如．

$$r^{[4:2:2]}_{[i,j\neq k]}\triangleq\frac{Ex_i^4}{Ex_j^2x_k^2}=3,\qquad r^{[6:4:2]}_{[i,j\neq k]}\triangleq\frac{Ex_i^6}{Ex_j^4\cdot x_k^2}=5\text{，}$$

*) $0!!=(-1)!!=1$．

$r^{[6;2;2;2]}=15$，$r^{[8;4;4]}=35/3$，等等．这些比值与X的维数无关！

§2 球对称假设的显著性检验

设$X=RU$为球对称．则已知X的一个i.i.d.样本 X_1，…，X_n便相应知道U的一个i.i.d.样本U_1，…，U_n．我们有

$$\operatorname{Cov}(U^H, U^L)=\mu^U_{H+L}-\mu^U\cdot\mu^U_L. \tag{2.1}$$

对于样本矩的有限（$f\times 1$）的列$a^U=(a^U_L,a^U_H,\cdots)'$，我们可据（1.3）及（2.1）算出它的期望$\mu_v$及协差阵$\mathscr{V}_{U/n}$．易见，只要$a^U$中没有相同的矩，则$\mathscr{V}_U$满秩，除非$U$取有限个值．但我们已设$U$是均匀分布的，因此，只要$a^U$中的矩各异，则$a^U$渐近于$\mathscr{N}(\mu_U,\frac{1}{n}\mathscr{V}_U)$，可以从此得出检验 U 的均匀性的临界域：

$$n(a^U-\mu_U)'V_U^{-1}(a^U-\mu_U)\geq\chi^2_j(a).$$

临界值记号$\chi^2_j(a)$的意义属于通用，不加叙述．原知U为矩确定，故从各阶矩未能发现显著差异时，我们就确认U的无条件均匀性．此后，可着手检验R与U的相互独立性．办法是将R的取值范围分割成若干小段ΔR_i，在每小段中用上述方法检验相应U数据的均匀性，如果这一切条件均匀性均成立，R与U的独立性也就成立了，这检验过程中任何一步发现显著差异，X的球对称性就被否定了．有时候于某ΔR的U数据不够，我们便可以检验$[0,+\infty)\setminus\Delta R_i$中的．因为确认$U$的无条件均匀性后，$U$于$\Delta R_i$为条件均匀等价于$U$于$[0,+\infty]\setminus\Delta R_i$为条件均匀．

如果相应R（$R^2=X'X$）的各阶矩已知（例如在$\mathscr{N}(0,I_p)$的情形），则可算出$\operatorname{cov}(X^H,X^L)$，即可算出 $a^X=(a^X_H,a^X_L,\cdots)$的协差阵及期望．我们便可直接由a^X确定检验的临界域，办法类似于a^U的情形，但用a^X无须再检验R，U的独立性．

§3 椭球对称性假设的显著性检验

X具椭球对称性分布的定义是$X=a+AY$，而Y是球对称分布的．于a，A已知时，则检验X为椭球对称便等价于检验Y为球对称．当a，A未 问题就很不相同，本文的大部努力就是研究这一问题．现在，我们要根据X的一个i.i.d.样本X_1， X_n来检验X的椭球对称性．不失一般，设$A=T$为下三角阵，即零假设是$X=a+TY$，$Y=RU$，U在$U'\equiv 1$ 均匀分布；R与U相互独立．设 $\widehat{T}_X=\widehat{T}\widehat{T}'$，$\mathscr{V}_Y=\widehat{T}_Y\widehat{T}_Y'$，$\widehat{T}$及$\widehat{T}_Y$均下三角阵，于是，$\mathscr{V}_X=T\widehat{T}_Y\widehat{T}_YT'=(T\widehat{T}_Y)(T\widehat{T}_Y)'$ 因而$\widehat{T}=T\widehat{T}_Y$．由此，

$$Z_i\triangleq(\widehat{T}^{-1}(X_i-\overline{X})=\widehat{T}_Y^{-1}(Y_i-\overline{Y});\ i=1,\cdots,n. \tag{3.1}$$

令$T_Y^{-1}=(s_{ij})$，其中$s_{ij}=0$当$i<j$，则

$$\begin{cases} z_{1i}=s_{11}(Y_{1i}-\overline{Y}_{1\cdot}) \\ z_{2i}=s_{21}(Y_{1i}-\overline{Y}_{1\cdot})+s_{22}(Y_{2i}-\overline{Y}_{2\cdot}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{pi}=s_{p1}(Y_{1i}-\overline{Y}_{1\cdot})+\cdots+s_{pp}Y_{pi}-\overline{Y}_{p\cdot}) \end{cases} \tag{3.2}$$

类似于m^Y_V，我们定义m^Z_S（见§0），并由（3.2）可得下式：

$$m^Z_S=\sum_{\Delta_S}\prod_{j=1}^{p}\binom{v_j}{k_{j1},\cdots k_{jj}}\cdot s^{k_{11}}_{11}s^{k_{21}}_{21}s^{k_{22}}_{22}\cdots s^{k_{p1}}_{p1}\cdots s^{k_{pp}}_{pp}$$
$$\cdot m^Y_{k_{11}+k_{21}+\cdots+k_{p1},k_{22}+\cdots+k_{p2},\cdots k_{pp}}.$$

其中 $S=(s_1,\cdots,s_p)$，$\Delta_s=\{k_{j1}+\cdots+k_{jj}=s_j,\quad 1\le j\le p\}$． (3.3)

我们有

$$m_V^Y \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}(Y_{ji}-Y_{j\cdot})^{v_j}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^V-\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{p}v_j\Big(\sum_{l=1}^{N}Y_{jl}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}Y_k^{V-e_j}\Big)+R_v(n). \tag{3.4}$$

略去$R_V(n)$与$R_S(n)$，则$\mathrm{cov}(m_V^Y,m_S^Y)$的计算含有四类协差阵．

1： $\mathrm{cov}(Y_i^V,Y_r^S)=\begin{cases}\mu_{V+S}^Y-\mu_V^Y\mu_S^Y, & \text{当} i=r;\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$

这一类的非零项数是n，连同它们的系数，其总和是$\frac{1}{n}(\mu_{V+S}^Y-\mu_V^Y\mu_S^Y)$．

2： $\mathrm{cov}(Y_i^V,y_{ms}\cdot Y_t^{s-e_m})=\begin{cases}0, & \text{当} i\ne s;\\ \mu_{V+e_m}^Y\cdot\mu_{s-e_m}^Y, & \text{当} i=s\ne t.\end{cases}$

满足$i=s=t$的项数是n而$i=s\ne t$的项数是$n(n-1)$．因此，除了一个高阶无穷小量，这一类的总和是 $-\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{p}s_m\mu_{V+e_m}^Y\cdot\mu_{s-e_m}^Y$．

3：$\mathrm{cov}(Y_r^s,y_{jl}\cdot Y_k^{s-e_j})$．除了一个高阶无穷小量，这一类的总和是

$$-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}v_j\cdot\mu_{V-e_j}\mu_{s+e_j}$$

4： $\mathrm{cov}(y_{jl}Y_k^{V-e_k},y_{ms}Y_t^{s-e_m})$．这一类的主要贡献来自$k\ne l=s\ne t$的情形．除了一个高阶无穷小量，这一类各项的总和是 $\frac{1}{n}\sum_{m,j=1}^{p}s_m v_j\mu_{V-e_j}^Y-\mu_{jm}^Y\cdot\mu_{s-e_m}^Y$．

所以各类的总和是

$$\mathrm{cov}(m_V^Y,m_S^Y)=\frac{1}{n}\Big\{\mu_{V+S}^Y-\mu_V^Y\mu_S^Y-\sum_{m=1}^{p}s_m\mu_{V+e_m}^Y\mu_{S-e_m}^Y-\sum_{j=1}^{p}v_j\mu_{V-e_j}^Y\cdot\mu_{S+e_j}^Y$$
$$+\sum_{m,j=1}^{p}s_m v_j\mu_{V-e_j}^Y\mu_{jm}^Y\mu_{S-e_m}^Y+o\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{3.5}$$

$R_v(n)$是形如$\overline{Y}^K\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^S$，的项的总和，项数与$n$无关．从（3.4）我们得出：

$$m_V^Y-Em_V^Y=a_V^Y-\mu_V^Y+O\Big(\frac{1}{n}\Big)+\sum(-1)v_jY_j\cdot a_{V-e_j}+R_V(n) \tag{3.6}$$

其中用到$Em_V^Y=\mu_V^Y+O(\frac{1}{n})$，这一关系可从（3.4）式导出，方法与（3.5）的推导类似．为了在计算$\mathrm{cov}(m_V^Y,m_S^Y)$ 值时也考虑到$O(\frac{1}{n})$与$R_V(n)$的项，我们先注意到$E[\overline{Y}^K\cdot a_S^Y]^2=O(1/n^{|K|})$，这等式可用类似推导（3.5）式的方法导出．据C－S不等式，容易得见在计算$\mathrm{cov}(m_v^Y,m_S^Y)$之时，有关$O(\frac{1}{n})$及$R_v(n)$等的贡献总共不过只是一个$O(\frac{1}{n^2})$，所以（3.5）是成立的．至此，我们要引进一个定理，它见于〔1〕，下面将用到这个定理．

定理二 设有关记号与本节用过的一样，并设

$$m^Y_{s\times 1}=(m^Y_{11},\ m^Y_{22},\ \cdots,\ m^Y_{p1},\ \cdots,\ m^Y_{pp},\ m^Y_{|V|,0,\cdots,0},\ m^Y_{|V|-1,1,0,\cdots,0},\ m^Y_{|V|-1,0,1,0,\cdots,0},\ \cdots,\ m^Y_{0,\cdots 0,|V|}),$$

为Y的一切二阶矩及一切$|V|$阶矩所构成的列向量，其中$s=\frac{1}{2}p(p+1)+\binom{p+|V|-1}{p-1}$.）

若S个变元的函数$H(m^Y)$对m^Y的每一个变元均于$m^Y=\mu^Y$一个磷域内连续可微，则$\sqrt{n}\ (H(m^Y)-H(\mu^Y))$具有渐近分布$N(0,\ W)$，其中$\frac{W}{n}=\frac{\partial H}{\partial m^Y}\Big|_\mu \widetilde{\mathrm{Var}}\ (m^Y)\frac{\partial H'}{\partial m^Y}\Big|_\mu$

而$\widetilde{\mathrm{Var}}(m^Y)$是依（3.5）略去$o(\frac{1}{n})$而计算$\mathrm{Var}(m^Y)$的结果，$\frac{\partial H}{\partial m^{Y'}}l_\mu$表在$\frac{\partial H}{\partial m^Y}$中以$\mu^Y$取代$m^Y$所得的结果.

下设$|V|>2$，

$H(m^Y)=\underset{f\times 1}{m^Z}\ \widehat{=}\ (m^Z_{|V|,0,\cdots 0},\ \cdots m^Z_V\cdots m^Z_{0,\cdots 0,|V|})'$ $f=\binom{p+|V|-1}{p-1}$，引用（3.3），我们便得出.（令$C=(\frac{p}{r^2})^{\frac{1}{2}|V|}ER^{|V|}$，$r^2=ER^2$）$H(\mu^Y)=C(\mu^U_{|V|,0,\cdots,0}\cdots\mu^U_V,\cdots\mu^U_{0,\cdots,0,|V|})'$ 对$|S|=|V|$，则从（3.3）可得出

$$\frac{\partial m^Z_V}{\partial m^Y_S}\sum_{\Delta V,S}\prod_{j=1}^{p}\binom{v_j}{k_{j1}\cdots k_{jj}}\quad s^{k_{j1}}\cdots s^{k_{jj}}$$

$$\Delta_{V,S}=\{k_{ji},1\le i\le j\le p:k_{j1}+\cdots+k_{jp}=v,\ k_{ii}+\cdots+k_{pi}=s_i,\ 1\le i,j\le p\}. \tag{3.7}$$

对$1\le l\le h\le p$我们有

$$\frac{\partial m^Z_V}{\partial s_{hl}}=\sum_{\Delta_V}k_{hl}\prod_{j=1}^{p}\binom{v_j}{k_{j1},\cdots k_{jj}}\ s^{k_{j1}}\cdots s^{k_{jj}}\ m^Y_{S/S_{hl}} \tag{3.8}$$

其中　1）$\Delta_V=\{k_{ji},_j,\ 1\le i\le j\le p:\ k_{j1}+\cdots+k_{jj}=v_j$

2）$k_{hl}=0$的项定义为零，

3）$s_l=k_{ll}+\cdots+k_{pl}$，　$l=1,\cdots,\ p$.

因此，对$|V|,|s|>2$我们有

$$\frac{\partial m^Z_V}{\partial m^Y_S}\Big|_\mu=r^{-|V|}\cdot p^{\frac{1}{2}|V|}\text{当}S=V\text{，其余情况则为}0. \tag{3.9}$$

对$1\le l<h\le h$我们有$\frac{\partial m^Z_V}{\partial s_{hl}}\Big|_\mu=Cv_h\mu^U_{V+e_l-e_h}$，而对$1\le h\le p$，则

$\frac{\partial m^Z_V}{\partial s_{hh}}\Big|_\mu=Cv_h\mu^U_V$，其中$C=(p/r^2)^{\frac{1}{2}(|V|-1)}\cdot ER^{|V|}$，而$V_h=0$的项则定义为零.（3.10）

令$T_Y=(t_l^j)$，则从$T_Y^{-1}T_Y\equiv 1$便知

$$\frac{\partial(s_{11},\ s_{21},\ s_{22},\ \cdots,\ s_{pl},\ \cdots,\ s_{pp})}{\partial(t_{11},\ t_{21},\ t_{22},\ \cdots,\ t_{p2},\ t_{pp})}\Big|_\mu=\frac{p}{r^2}I_{\frac{1}{2}p(p+1)}. \tag{3.11}$$

对已给的l，s满足$1\le s\le l\le p$，从$V_Y=T_YT_Y'$我们便得

$$\frac{\partial m_{ij}^{Y}}{\partial t_{ls}}\Big|_{\mu}=E_{ls}(t_{ij})'\Big|_{\mu}+(t_{ij})\Big|_{\mu}E_{sl}=\frac{1}{\sqrt{p}}[E_{ls}+E_{sl}],$$

其中对 $1\leq h, k\leq p$，E_{hk} 代表（h，k）元为 1，其余为 0 的 $p\times p$ 矩阵．由此便得

$$\frac{\partial(m_{11}^{Y},\ m_{21}^{Y},\ m_{22}^{Y},\ \cdots,\ m_{p1}^{Y},\ \cdots,\ m_{pp}^{Y})'}{\partial(t_{11},\ t_{21},\ t_{22},\ \cdots,\ t_{p1},\ \cdots,\ t_{pp})'}\Big|_{\mu}=\frac{r}{\sqrt{p}}\operatorname{diag}(2,1,2,1,1,2,\cdots,1,\cdots,1,2)$$

$$\hat{=}\frac{r}{\sqrt{p}}\mathscr{D} \tag{3.13}$$

令 $m_1^{Y}=(m_{11}^{Y},\ m_{21}^{Y},\ m_{22}^{Y},\ \cdots,\ m_{p1}^{Y},\ \cdots,\ m_{pp}^{Y})$

$s=(s_{11},\ s_{21},\ s_{22},\ \cdots,\ s_{p1},\ \cdots,\ s_{pp})$

$t=(t_{11},\ t_{21},\ t_{22},\ \cdots,\ t_{p1},\ \cdots,\ t_{pp})$．

并令 $m^{Y}=(m^{Y}_{|V|,0,\cdots,0},\ \cdots,\ m^{Y}_{0,\cdots,|V|})$ 是 Y 的 $|V|$ 阶样本矩组成的向量．则从（3.10），（3.11）及（3.13）我们有

$$\frac{\partial m^{Z}}{\partial m_1^{Y'}}\Big|_{\mu}=\left(\frac{\partial m^{Z}}{\partial s'}\ \frac{\partial s}{\partial t'}\ \frac{\partial t}{\partial m_1^{Y}}\right)\Big|_{\mu}=\left(\sqrt{\frac{p}{r}}\right)^{|V|+2}ER^{|V|}(q_{V,(h,l)})\cdot\mathscr{D}^{-1}, \tag{3.14}$$

其中 $q_{V,(h,l)}=\begin{cases} v_h\mu^{U}_{V+e_l-e_h}, & \text{当 } l<h \\ v_h\mu^{U}_{V}, & \text{当 } l=h \end{cases}$

（$q\cdots$）是一个 $f\times p(p+1)/2$ 矩阵，其引与列分别用 V 及（h，l）标出．

从（3.9）我们得出

$$\frac{\partial m^{Z}}{\partial m_2^{Y}}\Big|_{\mu}=r^{-|V|}p^{\frac{1}{2}|V|}I_f. \tag{3.15}$$

将后边得出两个等式以及（3.5）式一起代入到

$$\frac{W}{n}=\left(\frac{m^{Z}}{m_1^{Y'}},\ \frac{m^{Z}}{m_2^{Y'}}\right)\Big|_{\mu}\begin{pmatrix}\operatorname{Var} m_1^{Y}, & \operatorname{Cov}(m_1^{Y},m_2^{Y})\\ \operatorname{Cov}(m_2^{Y},m_1^{Y}), & \operatorname{Var} m_2^{Y}\end{pmatrix}\left(\frac{\partial m^{Z}}{\partial m_1^{Y'}},\frac{\partial m^{Z}}{\partial m_2^{Y'}}\right)'\Big|_{\mu} \tag{3.16}$$

我们便得出区别地适合于各种情况的（任给 p，$|V|$）计算 W 的完全确定的程序．与此同时，据上述，$H(\mu^{Y})$ 也是完全确定的，因此也就完全确定应用 $|V|$ 阶样本矩作为 X 的椭球对称性假设的显著性检验的临界域：

$$n\,(H(m^{Y})-H(\mu^{Y}))'W^{-1}(H(m^{Y})-H(\mu^{Y}))\leq\chi_f^2(a) \tag{3.17}$$

沿此途径，我们可以导出使用样本矩逐步升阶的递归程序以作假设的显著性检验．为不使文章过于冗长，留给有兴趣的读者．

参 考 文 献

[1] H. Cramer (1946), Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press, p367.