1987年8月

数学研究与评论
第七卷 第三期

关于无K一间隔的组合数*

初 文 昌

（大连工学院应用数学研究所）

§1. 引 言

从排列在一条直线上的 n 个元素中选取 m 个元素，以 $f_k(n,m)$ 表示任意两个被选元素的间隔均不为 k 之方式数．如果这 n 个元素排列在园周上，则相应的组合数以 $g_k(m,m)$ 表示．关于这两类组合数，I.Kaplansky 于1943年首先研究了 $k=0$ 时的计数问题，J.Konvalina 于1981年应用递归方法得到了 $k=1$ 时的计数表达式．对于一般的自然数 k，这一问题似乎更加复杂．

本文致力于在一般的意义下给出这一问题的完整解答．借助于直观的组合推理，§2中将给出序列 $f_k(n,m)$ 和 $g_k(n,m)$ 的卷积表示；应用形式幂级数和组合计算的技巧，§3和§4对§2中所得结果进行简化，得到了简洁的计数表示．这些结果均包含〔1〕、〔2〕中的结论作为特例．此外，文中将给出两类组合序列的一系列新颖而有趣的结果．其中用于简化问题而发展的方法本身在组合计算中亦有其独立意义．

除非特殊说明，当 $n\geq k\geq 0$ 时 $\binom{n}{k}$ 表示通常的二项系数，否则为0．

§2. 预 备 结 果

设 $n=q(k+1)+r$ $(0\leq r\leq k)$，考虑由元素列 $1,2,\cdots,n$ 重新排列所成的下表

$$\begin{array}{llllll}
1 & (k+1)+1 & 2(k+1)+1 & \cdots & (q-1)(k+1)+1 & q(k+1)+1 \\
2 & (k+1)+2 & 2(k+1)+2 & \cdots & (q-1)(k+1)+2 & q(k+1)+2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
r & (k+1)+r & 2(k+1)+r & \cdots & (q-1)(k+1)+r & q(k+1)+r \\
r+1 & (k+1)+r+1 & 2(k+1)+r+1 & \cdots & (q-1)(k+1)+r+1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
k & (k+1)+k & 2(k+1)+k & \cdots & (q-1)(k+1)+k & \\
k+1 & 2(k+1) & 3(k+1) & \cdots & q(k+1) &
\end{array}$$

我们看到，从排列在一条线上的 n 个元素 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中选取无 k 间隔的 m 个元素即相当于从上表中选取 m 个元素使得任一行中所选元素在该行中不相邻．注意到

$$f_0(n,m)=\binom{n-m+1}{m} \tag{1}$$

* 1985年8月10日收到．

考虑所选m个元素在各行中的分配方式便有

定理1 设$n=q(k+1)+r$ $(0\leq r\leq k)$，则当$n>k+1$时

$$f_k(n,m)=\sum_{\sum_{i=1}^{k+1} m_i=m}\prod_{i=1}^{r}\binom{q-m_i+2}{m_i}\prod_{j=r+1}^{k+1}\binom{q-m_j+1}{m_j}, \tag{2}$$

当$n\leq k+1$时

$$f_k(n,m)=\sum_{\sum_{i=1}^{n} m_i=m}\prod_{j=1}^{n}\binom{2-m_j}{m_j}=\binom{n}{m}. \tag{3}$$

系1 若$n<2m-k-1$，则$f_k(n,m)=0$ (4)

由(2)可建立递归关系

$$f_k(n,m)=\sum_{i=0}^{m}\binom{[\frac{n}{k+1}]-i+1}{i}f_{k-1}(n-[\frac{n}{k+1}],m-i) \tag{5}$$

对此结合数学归纳法即可证明系1．

又设$(n,k+1)=\gcd(n,k+1)$ $(n>k+1)$．对于排列在一个大园周上的n个元素，我们可以通过逐次隔k选取而得到$(n,k+1)$个小园，每个小圆包含$n/(n,k+1)$个元素，且同一园周上的任意两个相邻元素在原来大园上的间隔恰好为k．因此从排列在大园周上的n个元素中无k间隔地选取m个元素便等价于在$(n,k+1)$个小园周上选取m个元素使得同一小园周上的入选者在该圆周上互不相邻．注意到

$$g_0(n,m)=\frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m} \tag{6}$$

这里为明确起见规定$\frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}=\binom{n-m+1}{m}-\binom{n-m-1}{m-2}$．考虑$m$个元素在$(n,k+1)$个小圆上的分配方式便有

定理2 设$d=(n,k+1)$，则当$n\leq k+1$时

$$g_k(n,m)=\binom{n}{m}, \tag{7}$$

当$n>k+1$时

$$g_k(n,m)=\sum_{\sum_{i=1}^{d} m_i=m}\prod_{j=1}^{d}\frac{n}{n-m_jd}\binom{n/d-m_j}{m_j}. \tag{8}$$

系2 若$(n,k+1)=1$且$n>k+1$，则

$$g_k(n,m)=g_0(n,m)=\frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}. \tag{9}$$

系3 若$k+1<n<2m$，则$g_k(n,m)=0$ (10)

证明 由抽屉原则，对于满足$\sum_{i=1}^{d}m_i=m$的m_i $(1\leq i\leq d)$，总存在$m_{i_0}\geq[\frac{m+d-1}{d}]$．

因此由 $n<2m$ 便有 $\frac{n}{d}<2\frac{m}{d}\leq 2\left[\frac{m+d-1}{d}\right]\leq 2m_{i_0}$。此时(8)式和号中的每一项均有$i_0$存在，使得因子$\frac{n}{n-m_{i_0}d}\binom{n/d-m_{i_0}}{m_{i_0}}=0$。　　因此$g_k(n,m)=0$.证毕.

§3. 简 化 的 结 果

为化简§2中的结果，我们首先证明下述引理.

引理1 设N为自然数，则

$$\sum_{0\leq j\leq N}\frac{N}{N-j}\binom{N-j}{j}x^j=t^N+(1-t)^N, \tag{11}$$

$$\sum_{0\leq j\leq N}\binom{N-j}{j}x^j=\frac{t^{N+1}-(1-t)^{N+1}}{2t-1}, \tag{12}$$

这里$x=t(t-1)$.

证明 对于次数不大于$k-1$的多项式，k阶差分为0.因此 $\Delta^k\frac{N}{N-x}\binom{N-x}{k}=0$，亦即

$$\frac{N}{N-k}\binom{N-k}{k}=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k+j+1}\binom{k}{j}\frac{N}{N-j}\binom{N-j}{k}.$$

由此可得

$$\sum_{0\leq k\leq N}\frac{N}{N-k}\binom{N-k}{k}z^k=1+\sum_{j=0}^{N-2}(-1)^j\frac{N}{N-j}\binom{N-j}{j}\sum_{k=j+1}^{N-1}(-1)^{k+1}\binom{N-2j}{k-j}z^k=1-\sum_{j=0}^{N-2}\frac{N}{N-j}\binom{N-j}{j}z^j(1-z)^{N-2j}+\sum_{j=0}^{N-2}\frac{N}{N-j}\binom{N-j}{j}z^j+(-z)^N,$$

因此

$$\sum_{0\leq j\leq N}\frac{N}{N-j}\binom{N-j}{j}z^j(1-z)^{N-2j}=1+(-z)^N.$$

作变换$t=(1-z)^{-1}$，　上式便得（11）.同理可证（12）.

引理2 多重集合$\{a_1^{N_1}a_2^{N_1}\cdots a_{p_1}^{N_1},\ b_1^{N_2}b_2^{N_2}\cdots b_{p_2}^{N_2},\ \cdots,\ c_1^{N_k}c_2^{N_k}\cdots c_{p_k}^{N_k}\}$ 的n—组合数$C(\prod_{i=1}N_i^{p_i},n)$满足对称性

$$C\left(\prod_{i=1}^{k}N_i^{p_i},n\right)=C\left(\prod_{i=1}^{k}N_i^{p_i},\sum_{i=1}^{k}N_ip_i-n\right) \tag{13}$$

且 $C\left(\prod_{i=1}^{k}N_i^{p_i},n\right)=\prod_{j=1}^{k}(-1)^{p_j}\Delta_{x_j}^{p_j}\left.\binom{n-\sum_{i=1}^{k}[(N_i+1)x_i-p_i]-1}{\sum_{i=1}^{k}p_i-1}\right|X=0 \quad (14)$

特别地$C(0,0)=1$.这里Δ是步长为1的差分算子.

前者是明显的组合事实，后者可以应用交叉分类原理验证．

现在我们应用上述引理来证明本文的主要结论．

定理3 设$n=q(k+1)+r$（$0\le r\le k$），则

$$f_k(n,m)=(-1)^k\Delta_x^{k-r}\Delta_y^r\Big\{\sum_{i=0}^{[\frac{n+k+1}{2}]}(-1)^i\binom{i-(q+2)(x+y)-y+k-1}{k-1}\binom{n+k-m-i+1}{m-i}$$

$$-\sum_{j=q+2}^{[\frac{n+k+2}{2}]}(-1)^j\binom{j-(q+2)(x+y+1)-y+k-1}{k-1}\binom{n+k-m-j+1}{m-j}\Big\}\Big|_{x=y=0},\quad(15)$$

这里〔x〕表示x的整数部分．

证明 由引理1．2可得

$$\Big[\sum_{0\le j\le q+1}\binom{q-j+1}{j}x^j\Big]^{k-r+1}\Big[\sum_{0\le i\le q+1}\binom{q-i+2}{i}x^i\Big]^r$$

$$=\Big[\frac{t^{q+2}-(1-t)^{q+2}}{2t-1}\Big]^{k-r+1}\Big[\frac{t^{q+3}-(1-t)^{q+3}}{2t-1}\Big]^r$$

$$=\frac{t^{q+2}-(1-t)^{q+2}}{2t-1}\Big[\sum_{i=0}^{q+1}t^i(1-t)^{q+1-i}\Big]^{k-r}\Big[\sum_{j=0}^{q+2}t^j(1-t)^{q+2-j}\Big]^r$$

$$=\frac{t^{q+2}-(1-t)^{q+2}}{2t-1}\sum_{i=0}^{(q+1)k+r}C((q+1)^{k-r}(q+2)^r,i)t^i(1-t)^{(q+1)k+r-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{[\frac{n+k+1}{2}]}C((q+1)^{k-r}(q+2)^r,i)[t(1-t)]^i\Big\{\frac{t^{n+k+2-2i}-(1-t)^{n+k+2-2i}}{2t-1}\Big\}$$

$$-\sum_{j=q+2}^{[\frac{n+k+2}{2}]}C((q+1)^{k-r}(q+2)^r,n+k-j+2)[t(1-t)]^j\Big\{\frac{t^{n+k+2-2j}-(1-t)^{n+k+2-2j}}{2t-1}\Big\}$$

在上述的首尾两式中比较x^m的系数（注意C的对称性）有

$$f_k(n,m)=\sum^{[\frac{n+k+1}{2}]}(-1)^iC((q+1)^{k-r}(q+2)^r,i)\binom{n+k-m-i+1}{m-i}$$

$$-\sum_{j=q+2}^{[\frac{n+k+2}{2}]}(-1)^jC((q+1)^{k-r}(q+2)^r,j-q-2)\binom{n+k-m-j+1}{m-j}\quad(16)$$

由引理2，将（14）代入上式便得（15）．定理证完．

下面我们给出定理3关于$k=1,2$ 的具体公式．

系4 （见〔2〕）

$$f_1(n,m)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{n-m-i+2}{m-i}=\sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]}\binom{n-m-2i+1}{m-2i}.$$

系5 设$n=3i+r$ $(0\leq r\leq 2)$则

$$f_2(n,m)=\sum_{i=0}^{[\frac{n+3}{2}]}(-1)^i\varphi(i)\binom{n+3-m-i}{m-i},\tag{17}$$

这里函数 $\varphi(i)=\begin{cases} i+1, & (0\leq i\leq q+1) \\ n-2i+4, & (q+1<i\leq[\frac{n+3}{2}]) \end{cases}$ (18)

显然应用此式计算$f_2(n,m)$要比直接套用公式(15)来得容易.

类似地，对于环型问题，我们有下述.

定理4 设$d=(n,k+1)$，则当$n>k+1$时

$$q_k(n,m)=\sum_{i=0}^{[\frac{d-1}{2}]}(-1)^{ni/d}\binom{d}{i}\frac{nd-2ni}{nd-md-ni}\binom{n-m-ni/d}{m-ni/d}$$
$$+(-1)^{n/2}(2[\frac{d}{2}]-d+1)\binom{d}{[\frac{d}{2}]}\delta_{m,\frac{n}{2}},\tag{19}$$

这里δ是Kroncker 符号.

证明 由(11)可得

$$\left[\sum_{0\leq j\leq N}\frac{N}{N-j}\binom{N-j}{j}x^j\right]^p=[t^N+(1-t)^N]^p=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}t^{Ni}(1-t)^{N(p-i)}$$

$$=\sum_{j=0}^{[\frac{p-1}{2}]}\binom{p}{i}[t(1-t)]^{Ni}[t^{N(p-2i)}+(1-t)^{N(p-2i)}]+\binom{p}{[\frac{p}{2}]}[t(1-t)]^{[\frac{p}{2}]N}.$$

$$\times(2[\frac{p}{2}]-p+1).$$

在上面首尾两式中，注意到$x=t(t-1)$并比较x^m之系数，则

$$\sum_{\sum_{i=1}^{p}m_i=m}\prod_{i=1}^{p}\frac{N}{N-m_i}\binom{N-m_i}{m_i}=\sum_{i=0}^{[\frac{p-1}{2}]}(-1)^{Ni}\binom{p}{i}\frac{N(p-2i)}{N(p-i)-m}\binom{N(p-i)-m}{m-Ni}$$
$$+(-1)^{N[\frac{p}{2}]}(2[\frac{p}{2}]-p+1)\binom{p}{[\frac{p}{2}]}\delta_{m,[\frac{p}{2}]N}.\tag{20}$$

将上式与(8)比较便得(19).证毕.

注意到$n>md$时，(20)中只有对应于$i=0$的项非0，由此便有

系6 当$n>m(n,k+1)$时，有

$$g_k(n,m)=g_0(n,m)=\frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m} \qquad (21)$$

这是一个出人意料的结果，并且它与系 2 互不包含．对于 $n>m(n,k+1)$ 时 $g_k(n,m)$ 的如此简单之表述形式，是否存在纯粹组合构造的证明？这是一个比较有趣的问题．

下面我们给出定理 4 在 $k=1,2,3$ 时的具体形式．

系 7 $g_1(n,m)$ 的完整解答为

$$g_1(n,m)=\begin{cases}\binom{n}{m} & (n=2),\\ \frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}+(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot 2\delta_{m,\frac{n}{2}}, & n\equiv 0(\bmod 2),\ n>2,\\ \frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}, & n\equiv 1(\bmod 2).\end{cases}$$

系 8

$$g_2(n,m)=\begin{cases}\frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}, & n\equiv 1,2(\bmod 3),\\ \frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}+(-1)^{\frac{n}{3}}\frac{n}{\frac{2}{3}n-m}\binom{\frac{2}{3}n-m}{m-n/3}, & n\equiv 0(\bmod 3).\end{cases} \qquad (22)$$

系 9

$$g_3(n,m)=\frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}+\psi(n,m), \qquad (23)$$

这里

$$\psi(n,m)=\begin{cases}0, & n\equiv 1,3\ (\bmod 4),\\ -2\delta_{m,\frac{n}{2}}, & n\equiv 2\ (\bmod 4),\\ (-1)^{n/4}\frac{8n}{3n-4m}\binom{\frac{3}{4}n-m}{m-n/4}+6\delta_{m,\frac{n}{2}}, & n\equiv 0(\bmod 4).\end{cases}$$

这些具体公式可以用于构造某些相关的数表．

§ 4．结果的进一步简化

在这节中，定义 $\binom{a}{k}=\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$（$k$ 为非负整数）．令 $A_k(a,\beta)=\frac{a}{a+\beta k}\binom{a+\beta k}{k}$，$B_k(a,\beta)=\binom{a+\beta k}{k}$．H．W．Gould[3]证明了如下命题．

引理 3 若 $|Z|<\left|\frac{(\beta-1)^{\beta-1}}{\beta^\beta}\right|$，则

$$\sum_{k\geq 0}A_k(a,\beta)z^k=x^a, \qquad (24)$$

$$\sum_{k\geq 0}B_k(a,\beta)z^k=\frac{x^{a+1}}{(1-\beta)x+\beta}, \qquad (25)$$

这里 $z=(x-1)/x^\beta$．

为进一步简化§2中的结果，我们需要证明下述引理．它可以用于某些级数的求和．

引理4 设$P(x)$是一个p项多项式，则

$$\sum_{i=m}^{n-1} q^i P(i)=\frac{1}{1-q}\left\{q^m \sum_{i=0}^{p}\left(\frac{q}{1-q}\right)^i \Delta^i P(m)-q^n \sum_{i=0}^{p}\left(\frac{q}{1-q}\right)^i \Delta^i P(n)\right\}. \quad (26)$$

特别当$|q|<1$时，我们有

$$\sum_{k=m}^{\infty} q^k P(k)=\frac{q^m}{1-q} \sum_{i=0}^{p}\left(\frac{q}{1-q}\right)^i \Delta^i P(m). \quad (27)$$

证明 选择参量t使$|qt|<1$．作多项式

$$F(t)=\sum_{k=m}^{n-1}(qt)^k P(k).$$

注意到收敛性并应用$P(x)$的差分表示，则有

$$F(t)=\sum_{k=m}^{\infty}(qt)^k \sum_{i=m}^{k}\binom{k-m}{i-m} \Delta^{i-m} P(m)-\sum_{k=n}^{\infty}(qt)^k \sum_{j=n}^{k}\binom{k-n}{j-n} \Delta^{j-n} P(n)$$

$$=\sum_{i=m}^{\infty} \Delta^{i-m} P(m) \sum_{k=i}^{\infty}\binom{k-m}{i-m}(qt)^k-\sum_{k=j}^{\infty} \Delta^{j-n} P(n) \sum_{k=j}^{\infty}\binom{k-n}{j-n}(qt)^k$$

$$=\frac{(qt)^m}{1-qt} \sum_{i=0}^{p}\left(\frac{qt}{1-qt}\right)^i \Delta^i P(m)-\frac{(qt)^n}{1-qt} \sum_{j=0}^{p}\left(\frac{qt}{1-qt}\right)^j \Delta^j P(n).$$

两端同乘以$(1-qt)^{p+1}$，并注意到在$|qt|<1$时的恒等性，根据多项式恒等的代数定理便知

$$F(t) \equiv \frac{1}{1-qt}\left\{(qt)^m \sum_{i=0}^{p}\left(\frac{qt}{1-qt}\right)^i \Delta^i P(m)-(qt)^n \sum_{j=0}^{p}\left(\frac{qt}{1-qt}\right)^j \Delta^j P(n)\right\}. \quad (28)$$

令$t=1$便得（26），由此容易给出（27）．证毕．

定理5 若$n \geq (k+1)(m-1)$，则

$$f_k(n,m)=2^{1-k} \sum_{i=0}^{k+m-1} \Delta^i \binom{k+x-1}{k-1}\binom{n-m+k-x-1}{m}\Bigg|_{x=0} \quad (29)$$

或

$$f_k(n,m)=2^{-k} \sum_{j=0}^{k+m} \Delta^j \binom{k+x}{k} \frac{n+k-x+1}{n-m+k-x+1}\binom{n-m+k-x+1}{m}\Bigg|_{x=0} \quad (30)$$

证明 当a为自然数时，$\binom{a}{k}$在（2）和（25）之定义的一致性要求$n \geq (k+1) \times (m-1)$．由（2）和（25）得

$$f_k(n,m)=\text{coef}.[z^m]\left(\sum_{k \geq 0} B_k(q+2,-1) z^k\right)^r\left(\sum_{k \geq 0} B_k(q+1,-1) z^k\right)^{k-r+1}$$

$$=\text{coef}.[z^m] \frac{x^{n+2k+2}}{(2x-1)^{k+1}} \quad \langle\text{注意引理3要求}|2x|>1\rangle$$

$$=\begin{cases}\operatorname{coef}.[z^m]\ \sum_{i\ge 0}2^{-(k+i)}\binom{k+i-1}{k-1}\dfrac{x^{n+k-i+2}}{2x-1}\\ \operatorname{coef}.[z^m]\ \sum_{i\ge 0}2^{-(k+i+1)}\binom{k+i}{k}x^{n+k-i+1}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sum_{i\ge 0}2^{-(k+i)}\binom{k+i-1}{k-1}B_m(n+k-i+1,-1) & (31)\\ \sum_{i\ge 0}2^{-(k+i+1)}\binom{k+i}{k}A_m(n+k-i+1,-1). & (32)\end{cases}$$

对上述两无穷级数分别应用引理4便给出有限和式（29）和（30）.

注意到$A_m(n,-1)=B_m(n,-1)+B_{m-1}(n-2,-1)$，则（31）、(32）包含下述推论：

系10 若$n\geq m+(k+1)(m-1)$，则有递归关系

$$f_k(n,m)=f_{k+1}(n-1,m)+f_{k+1}(n-3,m-1) \qquad (33)$$

这一个奇怪的递归关系，看来寻求相应的组合证明并非易事.

说明 利用递归关系方法可以建立序列$\{f_2(n,m)\}$的普通母函数.

$$F(x,y)=\frac{1+xy}{1-x-x^2y}+\frac{x^3y^3-x^2y^2}{1+x^3y-x^6y^3}+\frac{2x^2y^4-x^6y^4}{(1-x-x^2y)(1+x^3y-x^6y^3)}.$$

表1．数$f_2(n,m)$

m, n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2			1	3	5	8	12	17	23	30	38	47	57	68	80	93
3				1	2	4	8	16	28	45	68	98	136	183	240	308
4								4	13	30	58	103	171	269	405	588
5									2	9	22	51	108	211	382	651
6										1	3	9	27	78	187	399
7														9	40	123
8															3	18
9																1

表 II. 数 $g_2(n, m)$

m/n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2			1	3	2	5	12	14	20	27	35	44	54	65	77	90
3				1			8	7	16	27	50	77	112	157	210	275
4									2		25	55	108	182	294	450
5											2	11	48	91	196	375
6													8	13	49	125
7															2	
8																

References

[1] I. Kaplansky, Solution of the "Probleme des menages", Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943), 784—785.

[2] J. Konvalina, On the number of combinations without unit separation, J. Comb. Th (A), 31 (1981), 101—107.

[3] H. W. Gould, Some generalizations of Vandermonde's convolution, Amer. Math. Month., 63 (1956), 84—91.

On the Number of Combinations Without k-Separations

Chu Wenchang

(Dalian Institute of Technology)

Abstract

Let $f_k(n, m)$ denote the number of ways of selecting m objects from n objects arrayed in a line with no two selected having k-separations (i.e., having exactly k-objects between them). If the objects are arranged in a circle, the corresponding number is denoted by $g_k(n, m)$. Kaplansky[1] first published a derivation by recurrence relation for $k=0$. Recently, Konvalina[2] derived the enumerative formulae for $k=1$ by using the similar method. For a general k, this problem is somehow more difficult and complicated[2].

In this paper, we first present the counting formulae of $f_k(n,m)$ and $g_k(n,m)$ in the form of multifold convolutions by means of the intuitive deduction. Suggested by Gould's work [3] we derive some algebraic identities concerning formal power series and difference operator which can be used to compute some types of summations. Based on these results, some simplified counting formulae are presented. The main one may be stated as follows

i. Let $n=q(k+1)+r$ $(0\leq r\leq k)$, then

$$f_k(n,m)=(-1)^k\Delta_x^{k-r}\Delta_y^r\left\{\sum_{i=0}^{[\frac{n+k+1}{2}]}(-1)^i\binom{i-(q+2)(x+y)-y+k-1}{k-1}\binom{n+k-m-i+1}{m-i}\right.$$

$$\left.-\sum_{j=q+2}^{[\frac{n+k+2}{2}]}(-1)^j\binom{j-(q+2)(x+y+1)-y+k-1}{k-1}\binom{n+k-m-j+1}{m-j}\right\}\Bigg|_{x=y=0}.$$

ii. Let $d=(n,k+1)$ $(n>k+1)$, then

$$g_k(n,m)=\sum_{i=0}^{[\frac{d-1}{2}]}(-1)^{ni/d}\binom{d}{i}\frac{nd-2ni}{nd-md-ni}\binom{n-m-ni/d}{m-ni/d}$$

$$+(-1)^{[\frac{n}{2}]}\left(2\left[\frac{d}{2}\right]-d+1\right)\binom{d}{[\frac{d}{2}]}\delta_{m,\frac{n}{2}}.$$

In addition, the paper contains a number of special simple formulas. For example, when $n=3q+r$ $(0\leq r\leq 2)$ we have

$$f_2(n,m)=\sum_{i=0}^{[\frac{n+3}{2}]}(-1)^i\varphi(i)\binom{n+3-m-i}{m-i},$$

where $$\varphi(i)=\begin{cases} i+1, & (0\leq i\leq q+1),\\ n-2i+4, & (q+1<i\leq[\frac{n+3}{2}]).\end{cases}$$

The corresponding circular result is

$$g_2(n,m)=\begin{cases}\dfrac{n}{n-m}\dbinom{n-m}{m}, & n=1,2\ (\mathrm{mod}\,3),\\[2ex] \dfrac{n}{n-m}\dbinom{n-m}{m}+(-1)^{\frac{n}{3}}\dfrac{n}{\frac{2}{3}n-m}\dbinom{\frac{2}{3}n-m}{m-\frac{n}{3}}, & n=0\ (\mathrm{mod}\,3).\end{cases}$$

Of course, the main theorems include the results of [1] and [2] as their special cases. For some particular cases, several interesting and surprising conclusions are obtained that we have not found combinatorial proofs.