1987年11月 数学研究与评论
第七卷 第四期

关于Ahuja的一个定理*

杨定恭

（苏州大学数学系）

设 n 为非负整数，$0<\alpha<1$．如果单位圆盘$\Delta=\{z:|z|<1\}$内解析函数$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$满足条件

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z(D^nf(z))'}{D^nf(z)}\right\}>\alpha, \tag{1}$$

这里$D^nf(z)$是$z(1-z)^{-n-1}$与$f(z)$的Hadamard乘积，称$f(z)$在类$\mathrm{R}_n(\alpha)$中．

Ahuja在〔1〕中引进了函数类$\mathrm{R}_n(\alpha)$，并建立了下面的结果〔1，pp．658—660〕：

定理A 若$F(z)$在$\mathrm{R}_n(\alpha)$中，r是复数且$\mathrm{Re}\,r>-\alpha$，$0\le\beta<1$，

$$F(z)=\frac{1+r}{z^r}\int_0^z f(t)t^{r-1}\mathrm{d}t,\quad z\in\Delta, \tag{2}$$

则函数$f(z)$当$|z|<\mathrm{r}_0$时在类$\mathrm{R}_n(\beta)$中．这里r_0是方程

$$(r+2\alpha-1)(2\alpha-\beta-1)\mathrm{r}^2+2((r+\alpha)(\alpha-\beta)-(1-\alpha)(2-\alpha))\mathrm{r}+(r-1)(1-\beta)=0 \tag{3}$$

在$(0,1)$中的最小正根．这结果是准确的．

我们指出，就复数r而言，即使当$\alpha=\beta$时定理A也是不成立的．例如置$\alpha=\beta=0$，$r=i$，方程（3）化为方程$(1-i)\mathrm{r}^2-4\mathrm{r}+1+i=0$，后者没有实根，在$(0,1)$中更无正根．事实上，Ahuja在证明定理A时得到不等式〔1，(2.25)〕．

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z(D^nf(z))'}{D^nf(z)}-\beta\right\}\ge(\alpha-\beta)+\frac{(1-\alpha)((1-0)(r+1+(r+2\alpha-1)\mathrm{r})-2\mathrm{r})}{(1+\mathrm{r})((r+2\alpha-1)\mathrm{r}+r+1)},$$

这里$\mathrm{Re}\,r\ge-\alpha$，而这个不等式的右端是复数，于是导致错误的结论．

然而当$\alpha=\beta$时，我们可以求出圆盘的准确半径r^*，使（2）确定的函数$f(z)$在$|z|<\mathrm{r}^*\le1$内满足不等式（1）．确切地说，有

定理 $F(z)$在$\mathrm{R}_n(\alpha)$中，r是复数且$\mathrm{Re}\,r>-1$，则（2）定义的函数$f(z)$在$|z|<\mathrm{r}^*$内属于$\mathrm{R}_n(\alpha)$，这里

$$\mathrm{r}^*=\frac{|\mu+1|}{[A+(A^2-|\mu^2-1|^2)^{1/2}]^{1/2}},\quad A=2(s+1)^2+|\mu|^2-1,$$

$$\mu=\frac{\alpha+r}{1-\alpha},\qquad s=\frac{1}{1-\alpha}$$

这结果是准确的，即圆盘的半径r^*是最好的界限．

参考文献

〔1〕Ahuja, O. P., Internat. J. Math. and Math. Sci. 8(1985), 653—662.

* 1987年3月26日收到．